**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова**

# ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

ЧАСТИНА 3

**Навчальний довідник**
**для самостійного вивчення курсу вищої математики**
**(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей)**

**Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018**

**Кузнецова Г. А.** Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 3 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей) / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 141 с.

Автори: Г. А. Кузнецова,
С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова

Рецензент
канд. фіз.-мат. наук., доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 3 від 28 жовтня 2016 р.

Навчальний довідник містить додатковий допоміжний матеріал, призначений для самостійного опрацювання теми «Основи математичного аналізу» в процесі вивчення курсу вищої математики, рекомендовано для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

У довіднику викладено теоретичний матеріал щодо основ математичного аналізу за темами «Функція декількох змінних», «Кратні інтеграли», «Криволінійні інтеграли», які входять до курсу вищої математики для студентів 1, 2 курсів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей.

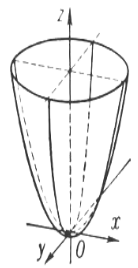
Довідник «Основи математичного аналізу (частина 3)» складається з трьох розділів: «Функція декількох змінних», «Кратні інтеграли», «Криволінійні інтеграли» та додатків.

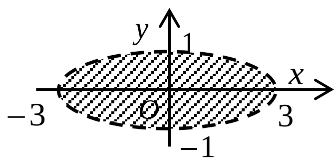
Теоретичний матеріал представлено у вигляді опорних таблиць, які містять визначення основних понять та формули, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв’язання типових задач із застосуванням зазначеного теоретичного матеріалу.

У додатках подано окремі визначення, теореми та задачі, розв’язання яких спричиняє труднощі, або є допоміжним матеріалом під час розв’язання більш складних задач.

# 1 ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

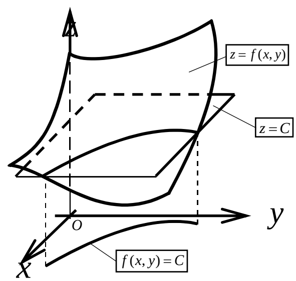
## 1.1 Поняття функції декількох змінних. Область її визначення

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Змінна величина $z$ називається *функцією двох змінних* величин $x$ та $y$, якщо кожній парі допустимих значень $x$ та $y$ відповідає єдине значення $z$ | Позначають так:<br>$z=f(x,y)$; $z=\varphi(x,y)$;<br>$z=F(x,y)$; $z=z(x,y)$ |
| 2 | Систему значень $x$ та $y$ називають точкою $M(x,y)$, а функцію двох змінних – *функцією точки* $z=f(M)$.<br>*Зауваження 1.* Геометричним зображенням функції двох змінних є деяка поверхня у просторі.<br>Наприклад, еліптичний параболоїд (рис. 1), рівняння якого | <br>Рисунок 1<br>$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$,<br>$(p,\ q=\text{const},\ p,q>0)$ |
| 3 | Змінна величина $u$ називається *функцією трьох змінних* величин $x$, $y$ та $z$, якщо кожній трійці допустимих значень $x$, $y$ та $z$ відповідає єдине значення | Позначають так:<br>$u=f(x,y,z)$;<br>$u=\varphi(x,y,z)$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $u$. Функцію $u = f(x, y, z)$ називають функцією точки $u = f(M)$, де $M(x, y, z)$ є точкою тривимірного простору | |
| 4 | Змінна величина $u$ називається *функцією декількох змінних* (або кажуть функція багатьох змінних) величин $x$, $y$, $z$,…,$t$, якщо кожному набору допустимих значень $x$, $y$, $z$,…,$t$ відповідає єдине значення $u$. Сукупність значень $x$, $y$, $z$,…, $t$ називається точкою $M(x, y, z, ..., t)$ $n$-вимірного простору, а функція $n$ змінних (декількох змінних) – функцією точки $u = f(M)$ | $u = f(x, y, z, ..., t)$ |
| 5 | Сукупність усіх точок, у яких визначена функція декількох змінних, називається *областю існування* або областю *визначення функції.* Наприклад, областю визна-чення функції $$z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$$ є внутрішня відкрита частина еліпса (рис. 2) (дод. А) | <br><br>Рисунок 2 |

| |
|---|
| *Зауваження 2.* Для функції двох змінних областю визначення є деяка частина координатної площини, обмежена однією або декількома лініями (або вся площина), для функції трьох змінних – це частина простору (або весь простір) |
| *Зауваження 3.* Надалі обмежимося розглядом функцій лише двох змінних. На випадок функцій більші кількості змінних відповідні результати поширюються за аналогією |

## 1.2 Границя та неперервність функції декількох змінних. Поняття приросту функції декількох змінних

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Лінією рівня* (рис. 3) функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини $Oxy$, у яких ця функція набуває одного й того самого значення $z = C$, $C = const$. Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області $D$ про-ходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$ (дод. Б) | Рівняння лінії рівня $f(x, y) = C$   Рисунок 3 |
| 2 | Число $A$ називається *границею функції* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для всіх значень $x$ та $y$, які достатньо мало відрізняються відповідно від чисел $x_0$ та $y_0$, відповідне зна- | Записують $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ |

<table>
<tr><td></td><td>чення $f(x,y)$ також як завгодно мало відрізняється від числа $A$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Зауваження 1. У цьому визначенні не передбачається, що функція визначена у точці $P_0\left(x_0,y_0\right)$ і тому будемо вважати, що або $x \neq x_0$, або $y \neq y_0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Знайти границю функції $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}\frac{tg(xy)}{x}$.<br>Розв’язання. Як зрозуміло, у точці $P_0\left(0;4\right)$ функція $z=\frac{tg(xy)}{x}$ не визначена. Використаємо другу чудову границю $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$ [13]. Помножимо і чисельник, і знаменник дробу на $y \neq 0$, отримаємо:<br>$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}\frac{tg(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}\frac{tg(xy)\cdot y}{x\cdot y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}y\cdot\frac{tg(xy)}{x\cdot y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}y\cdot 1=4\cdot 1=4$$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Нехай точка $P_0\left(x_0,y_0\right)$ належить до області визначення функції $z=f(x,y)$. Приростом функції $z=f(x,y)$ у заданій точці $P_0$ називається різниця $\Delta z$</td><td>$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-$<br>$-f(x_0,y_0)$,<br>де $\Delta x$ та $\Delta y$ – прирости аргументів</td></tr>
<tr><td>3, а</td><td>Частинний приріст для функції $z=f(x,y)$</td><td>$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-$<br>$-f(x_0,y_0)$,<br>$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-$<br>$-f(x_0,y_0)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3,б</td><td>Повний приріст функції $z=f(x,y)$</td><td>$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-$<br>$-f(x_0,y_0)$</td></tr>
<tr><td>3,в</td><td>Частинний приріст для функції $u=f(x,y,z)$</td><td>$\Delta u_x = f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-$<br>$-f(x_0,y_0,z_0)$,<br>$\Delta u_y = f(x_0, y_0+\Delta y, z_0)-$<br>$-f(x_0,y_0,z_0)$,<br>$\Delta u_z = f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)-$<br>$-f(x_0,y_0,z_0)$</td></tr>
<tr><td>3, г</td><td>Повний приріст функції $u=f(x,y,z)$</td><td>$\Delta u =$<br>$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-$<br>$-f(x_0,y_0,z_0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Функція $z=f(x,y)$ називається неперервною у точці $(x_0,y_0)$, якщо вона визначена у деякому околі цієї точки (дод. В) та якщо нескінченно малим приростам $x$ і $y$ відповідає нескінченно малий приріст $z$</td><td>Отже, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 2. При цьому точка $P(x,y)$ прямує до точки $P_0(x_0,y_0)$ довільним чином, залишаючись в області визначення функції.<br>Зауваження 3. Якщо означити $x_0+\Delta x$ через $x$, $y_0+\Delta y$ через $y$, то умова неперервності матиме такий вигляд:<br>$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)-f(x_0,y_0)\right]=0$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$,<br>а це означає, що функція неперервна у точці $(x_0,y_0)$, якщо її границя дорівнює значенню функції в</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | граничній точці.<br>*Зауваження 4.* Якщо в деякій точці $P(x_0, y_0)$ не виконується умова неперервності, то ця точка називається точкою розриву функції $z = f(x, y)$.<br>*Зауваження 5.* Умова неперервності функ-ції $z = f(x, y)$ може порушуватися як в окремій точці, так і в точках, що утворюють одну або декілька ліній (лінії розриву) |

**ПРИКЛАД 2.** Довести неперервність функції $z = x^2 + y^2$.

*Розв'язання.* Зрозуміло, що задана функція визначена для всіх значень $x$ та $y$, тобто в будь-якій точці площини $Oxy$. Повний приріст функції визначається за формулою

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2,$$

$$\Delta z = \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y.$$

Знайдемо границю при $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, отримаємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y) = 0.$$

Отже, задана функція є неперервною у точці $P(x, y)$

**ПРИКЛАД 3.** Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{6}{x^2 - y^2 - 2}$.

*Розв'язання.* Областю визначення функції є всі точки координатної площини $Oxy$, крім точок, що належать рівнобічній гіперболі, рівняння якої $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = 1$, оскільки $x^2 - y^2 - 2 \neq 0$ (знаменник дробу не може дорівнювати 0). Таким чином, точки розриву заданої функції розміщуються безпосередньо на цій гіперболі, а також утворюють лінію розриву (див. зауваження 5) функції, а її рівняння – $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

## 1.3 Частинні похідні та повний диференціал функції декількох змінних

<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">Частинною похідною функції двох змінних за однією зі змінних називають границю відношення частинного приросту функції до приросту цієї змінної, коли остання прямує до нуля:<br>частинна похідна за змінною $x$,<br>частинна похідна за змінною $y$</td><td>Згідно з визначенням,<br>$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$<br>$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$</td></tr>
<tr><td>Позначають так:<br>$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$<br>$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 1. Під час знаходження частинних похідних необхідно використовувати правила диференціювання функції однієї змінної, вважаючи другу змінну постійною.<br>Зауваження 2. Потрібно звернути увагу на те, що змінна зали-шається постійною тільки під час диференціювання, після знаходження похідної змінні величини $x$ та $y$ можуть набувати будь-яких значень. Отже, частинна похідна є функцією двох змінних.<br>Зауваження 3. Абсолютна величина частинної похідної $z'_x = f'_x(x, y)$ або $z'_y = f'_y(x, y)$ позначає величину швидкості, із якою змінюється функція $z = f(x, y)$, якщо змінюється тільки $x$ або тільки $y$, знак частинної похідної $f'_x$ або $f'_y$ вказує на різновид цих змін (зростання, спадання)</td></tr>
</table>

**ПРИКЛАД 1.** Знайти частинні похідні таких функцій:

а) $z = x^2 + y^2 - 3x\sqrt{y}$; б) $z = \dfrac{4x - y}{x^2 y^3 - 2}$; в) $z = x^2 \cdot \sin(xy)$.

*Розв'язання.* 1. Застосуємо правило диференціювання суми [13], отримаємо:

$$z'_x = \left(x^2\right)'_x + \left(y^2\right)'_x - \left(3x\sqrt{y}\right)'_x = 2x + 0 - 3\sqrt{y} = 2x - 3\sqrt{y},$$

нагадаємо, що $C' = 0$, $(Cu)' = C(u)'$. Тому $\left(y^2\right)'_x = 0$, а $\left(3x\sqrt{y}\right)'_x = 3\sqrt{y}$, бо $3\sqrt{y} = \mathrm{const} = C$, $x' = 1$.

$$z'_y = \left(x^2\right)'_y + \left(y^2\right)'_y - \left(3x\sqrt{y}\right)'_y = 0 + 2y - 3x\left(\sqrt{y}\right)' = 2y - \frac{3x}{2\sqrt{y}}.$$

2. Застосуємо правило диференціювання частки [13], отримаємо:

– частинна похідна за змінною $x$, при цьому змінна $y$ вважається постійною ($C' = 0$):

$$z'_x = \frac{(4x - y)'_x \cdot \left(x^2 y^3 - 2\right) - \left(x^2 y^3 - 2\right)'_x \cdot (4x - y)}{\left(x^2 y^3 - 2\right)^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \left(x^2 y^3 - 2\right) - 2xy^3 \cdot (4x - y)}{\left(x^2 y^3 - 2\right)^2} = -\frac{8 - 2xy^4 + 4x^2 y^3}{\left(x^2 y^3 - 2\right)^2},$$

– частинна похідна за змінною $y$, при цьому змінна $x$ вважається постійною ($C' = 0$):

$$z'_y = \frac{(4x - y)'_y \cdot \left(x^2 y^3 - 2\right) - \left(x^2 y^3 - 2\right)'_y \cdot (4x - y)}{\left(x^2 y^3 - 2\right)^2} =$$

<table>
<tr><td colspan="3">

$$= \frac{-1\cdot\left(x^2y^3-2\right)-3x^2y^2\cdot(4x-y)}{\left(x^2y^3-2\right)^2} = \frac{2-12x^3y^2+2x^2y^3}{\left(x^2y^3-2\right)^2},$$

3. Щоб знайти частинну похідну за змінною $x$, застосуємо правило диференціювання добутку [13]:

$$z'_x = \left(x^2\right)'_x\cdot\sin(xy) + x^2\cdot\left(\sin(xy)\right)'_x = 2x\sin(xy) + x^2y\cos(xy).$$

Визначаючи частинну похідну за змінною $y$, винесемо постійну $x^2$ за знак похідної:

$$z'_y = x^2\cdot\left(\sin(xy)\right)'_y = x^2\cdot\cos(xy)\cdot\left(xy\right)'_y = x^3\cos(xy)$$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Частинна похідна $f'_x(x_0, y_0)$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу $\alpha$ дотичної до лінії перерізу $l$ поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $y = y_0$ у відповідній точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$, тобто $f'_y(x_0, y_0) = tg\alpha$ *(геометричний зміст частинної похідної)* (рис. 4).

Аналогічно: частинна похідна $f'_y(x_0, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом відносно осі $Oy$, дотичної у точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$ до перетину поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $x = x_0$, тобто $f'_y(x_0, y_0) = tg\beta$

</td><td>

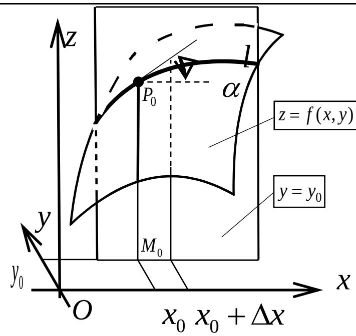



Рисунок 4

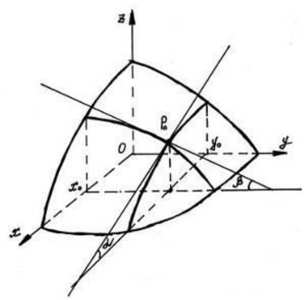
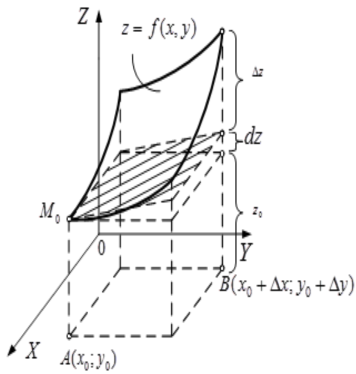


Рисунок 5

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Як зрозуміло з рисунка 5, $f'_y(x_0, y_0) > 0$, $f'_x(x_0, y_0) > 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина приросту $\Delta z$, лінійна відносно приростів аргументів $\Delta x$ та $\Delta y$</td><td>$dz = adx + bdy$,<br>$\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$,<br>$a, b = \mathrm{const}$;<br>згідно з теоремою (дод. Г)<br>$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Знайти повний диференціал функції $z = x^y$.<br>Розв’язання. Знайдемо частинну похідну заданої функції $z'_x = \left(x^y\right)'_x$, постійною у цьому випадку виступає $y$, тому знаходити похідну будемо за формулою диференціювання степеневої функції, отримаємо: $z'_x = yx^{y-1}$. Для знаходження частинної похідної за змінною $y$, де в якості постійної є $x$, задана функція виступає як показникова, тому $z'_y = x^y \ln x$.<br>Запишемо повний диференціал: $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Зауваження 4. При достатньо малих приростах аргументів $\Delta x$ і $\Delta y$ повний приріст $\Delta z$ функції $z = f(x, y)$ можна наближено замінити повним диференціалом $\Delta z \approx dz$. Звідси маємо формулу для наближеного обчислення значення функції: $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 3. Знайти наближене значення $1{,}98 \cdot \cos 1$.<br>Розв’язання. Розглянемо функцію $z = f(x, y) = x \cos y$. Виберемо найближчі значення для аргументів функції. Нехай $x_0 = 2$; $y_0 = \pi / 3$. Тоді<br>$$\Delta x = 1{,}98 - 2 = -0{,}02;\ \Delta y = 1 - \pi / 3 \approx -0{,}047.$$<br>Дістанемо:<br>$$1{,}98 \cos 1 = z(2 + \Delta x,\ \pi/3 + \Delta y) \approx z(2,\ \pi/3) +$$</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| $$+\frac{\partial z(2,\ \pi/3)}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial z(2,\ \pi/3)}{\partial y}\,\Delta y\,;$$ $$z(2,\ \pi/3)=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1;$$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\,;\quad \frac{\partial z(2,\ \pi/3)}{\partial x}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x\sin y\,;$$ $$\frac{\partial z(2,\ \pi/3)}{\partial y}=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\approx-1,73;$$ $$1,98\cdot\cos 1\approx 1+(1/2)\cdot(-0,02)+(-1,73)\cdot(-0,047)\approx$$ $$\approx 1-0,01+0,081\approx 1,07$$ | | |
| 4 | Повний диференціал функції $z=f(x,y)$, коли $x=x_0$, $y=y_0$, зображується приростом аплікати точки дотичної площини, проведеної до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точці її дотику *(геометричний зміст повного диференціалу)* (рис. 6) |   Рисунок 6 |
| | *Зауваження* 5. Якщо повний приріст функції $\Delta z$ представляє геометричний приріст аплікати поверхні $z=f(x,y)$, тоді диференціал функції $dz$ є приростом аплікати дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$ у даній точці, коли змінні $x$ та $y$ отримують прирости $\Delta x$ і $\Delta y$.<br>*Зауваження* 6. Функція, що має повний диференціал, називається *диференційованою*.<br>*Зауваження 7*. З геометричної точки зору наближеній | |

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">формулі обчислення повного приросту функції через її повний диференціал
$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\approx dz$$
відповідає заміна поверхні дотичною площиною в достатньо малому околі точки дотику</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Повний диференціал функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$</td><td>$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 4. Визначити, як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, що має розміри $a=8$ м, $b=6$ м, $c=3$ м, якщо його довжина та ширина збільшаться на 10 см та 5 см відповідно, висота зменшиться на 15 см.<br>
Розв'язання. Як відомо, об'єм паралелепіпеда знаходиться за формулою $V=xyz$, де $x, y, z$ – його виміри. Приріст об'єму можна приблизно обчислити за формулою
$$\Delta V=dV\text{, де } dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz\,.$$
Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$:
$$\frac{\partial V}{\partial x}=\left(xyz\right)'_x=yz\,,\ \frac{\partial V}{\partial y}=\left(xyz\right)'_y=xz\,,\ \frac{\partial V}{\partial z}=\left(xyz\right)'_z=xy\,,$$
отримаємо формулу для обчислення зміни об'єму паралелепіпеда:
$$dV=yzdx+xzdy+xydz\,.$$
Згідно умови задачі $x=8$, $y=6$, $z=3$, збільшиться його довжина та ширина на $dx=0{,}1$, $dy=0{,}05$, а також зменшиться висота на $dz=-0{,}15$ (зверніть увагу на переведення одиниць виміру: сантиметри в метри), тож
$$dV=6\cdot 3\cdot 0{,}1+8\cdot 3\cdot 0{,}05-8\cdot 6\cdot 0{,}15=1{,}8+1{,}2-7{,}2=-4{,}2\,.$$
Таким чином, об'єм зменшиться на $4{,}2$ $м^3$</td></tr>
</table>

## 1.4 Похідні та диференціали вищих порядків

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Частинними похідними другого порядку* функції $z = f(x, y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку | позначають<br>$f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$;<br>$f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$;<br>$f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$;<br>$f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ |
| 2 | *Частинні похідні третього порядку* (і більш вищого порядку) для функції $z = f(x, y)$ визначаються аналогічно | $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$;<br>$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$;<br>$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$;<br>$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$<br>і т. п. |
| 3 | *Теорема Шварца*. Якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою | для *других похідних* це:<br>$f''_{yx} = f''_{xy}$<br>для *третіх похідних*:<br>$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | *Повний диференціал другого порядку* | $$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+$$ $$+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$ |
| 5 | *Повний диференціал третього порядку* | $$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+$$ $$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$ |
| 6 | *Повний диференціал* $n$*-го порядку* | $$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$$ |

**ПРИКЛАД 1.** Знайти повний диференціал другого порядку функції $z=\ln(xy-y)$.

*Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln(xy-y)\right)'_x=\frac{y}{xy-y}=\frac{1}{x-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln(xy-y)\right)'_y=\frac{x-1}{xy-y}=\frac{1}{y}.$$

Тепер продиференціюємо знайдені частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{1}{(x-1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right)=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{1}{y^2}.$$

Запишемо повний диференціал другого порядку:

$$d^2z=-\frac{1}{(x-1)^2}dx^2+2\cdot 0\cdot dxdy-\frac{1}{y^2}dy^2=-\frac{1}{(x-1)^2}dx^2-\frac{1}{y^2}dy^2$$

**ПРИКЛАД 2.** Довести, що для функції $z=\left(x^2-y^2\right)^2$ виконується умова $f''_{yx}=f''_{xy}$.

*Розв'язання.* Знайдемо мішані частинні похідні другого порядку:

$$z'_x=\left(\left(x^2-y^2\right)^2\right)'_x=2\left(x^2-y^2\right)\cdot 2x=4x\cdot\left(x^2-y^2\right);$$

$$z''_{xy}=4x\left(x^2-y^2\right)'_y=-8xy;$$

$$z'_y=\left(\left(x^2-y^2\right)^2\right)'_y=-2\left(x^2-y^2\right)\cdot 2y=-4y(x^2-y^2);$$

$$z''_{yx}=-4y(x^2-y^2)'_x=-8xy.$$

Як бачимо, мішані похідні рівні: $z''_{yx}=z''_{xy}$, що й треба було довести

## 1.5 Диференціювання складеної та неявної функцій

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Якщо $z=F(u,v)$, де $u=\varphi(x,y)$ та $v=\psi(x,y)$, то функцію $z$ називають *складеною функцією* | $z=F(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ |
| 2 | Якщо $u=F(v_1,v_2,...,v_n)$, де $v_1=\varphi_1(x,y,z,...,t)$, $v_2=\varphi_2(x,y,z,...,t)$, …, $v_n=\varphi_n(x,y,z,...,t)$, то функція $u$ називається *складеною функцією незалежних змінних* $x$, $y$, $z$, …, $t$. Ці | $u=F(\varphi_1(x,y,...,t),$ $\varphi_2(x,y,...,t),...,\varphi_n(x,y,...,t))$ |

| | | |
|---|---|---|
| | змінні називають *проміжними аргументами* | |
| 3 | *Частинні похідні складеної функції двох змінних* $z = F(u,v)$ | $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$<br>$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$ |
| 4 | *Частинні похідні складеної функції декількох змінних* $u = F(v_1, v_2, ..., v_n)$ | $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x} + ... + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y} + ... + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial y} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial t} + ... + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial t} \end{cases}$ |

**ПРИКЛАД 1.** Знайти частинні похідні функції $z = e^{2u-v}$, якщо $u = y\cos x$, $v = xy^2$.

*Розв'язання.* Продиференціюємо кожну з функцій як функцію двох змінних:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(e^{2u-v}\right)'_u = 2e^{2u-v} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial v} = \left(e^{2u-v}\right)'_v = -e^{2u-v} \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(y\cos x\right)'_x = -y\sin x \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = \left(y\cos x\right)'_y = \cos x \ ;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(xy^2\right)'_x = y^2 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial y} = \left(xy^2\right)'_y = 2xy \ .$$

Запишемо частинні похідні згідно формул, отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2u-v}\left(-y\sin x\right) - y^2\cdot e^{2u-v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2u-v}\cos x - 2xy\cdot e^{2u-v}$$

*Зауваження 1.* Якщо задана функція $z = z(x,u,v)$, де $u, v$ є функціями одного аргументу $x$, тобто $u = u(x)$, $v = v(x)$, то

<table>
<tr><td colspan="3">функція $z$ є функцією однієї змінної і ставиться питання про знаходження похідної $\frac{dz}{dx}$. Її похідна обчислюється за формулою $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, в якій $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, а інші частинні похідні за змінною $x$ перетворюються у звичайну похідну функції однієї змінної, тож маємо формулу<br>$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>Функція $n$ незалежних змінних $x, y, z, ..., t$ називається неявною, якщо вона задана рівнянням</td><td>$F(x, y, z, ..., t, u)=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 2. Якщо функція $F(x, y, z, ..., t, u)=0$ та її частинні похідні $F'_x, F'_y, F'_z, \ldots, F'_t, F'_u$ визначені та неперервні у деякій точці $M_0\left(x_0, y_0, z_0, ..., t_0, u_0\right)$ та її околі, і якщо $F(M_0)=0$, але $F'_u(M_0)\neq 0$, то рівняння поблизу точки $M_0$, а також у самій точці визначає $u$ як неперервну та диференційовану функцію від $x, y, z, ..., t$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Неявна функція двох змінних</td><td>$F(x, y, z)=0$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Частинні похідні неявної функції двох змінних</td><td>$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Знайти частинні похідні неявної функції<br>$$xy^3-z^2e^{xy}=0.$$<br>Розв'язання. У даному випадку $F(x, y, z)=xy^3-z^2e^{xy}$. Знайдемо спочатку частинні похідні від $F(x, y, z)$:<br>$$F'_x=\left(xy^3-z^2e^{xy}\right)'_x=y^3-z^2ye^{xy};$$</td></tr>
</table>

$$F'_y=\left(xy^3-z^2e^{xy}\right)'_y=3xy^2-z^2xe^{xy};\quad F'_z=\left(xy^3-z^2e^{xy}\right)'_z=-2ze^{xy}.$$

За формулами отримаємо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^3-z^2ye^{xy}}{-2ze^{xy}}=\frac{y^3-z^2ye^{xy}}{2ze^{xy}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3xy^2-z^2xe^{xy}}{-2ze^{xy}}=\frac{3xy^2-z^2xe^{xy}}{2ze^{xy}}$$

**ПРИКЛАД 3.** Знайти частинні похідні неявної функції

$$arctg\,\frac{x-y}{z}=5.$$

*Розв'язання.* У даному випадку $F(x,y,z)=arctg\,\dfrac{x-y}{z}-5$.

Знайдемо спочатку частинні похідні $F(x,y,z)$:

$$F'_x=\left(arctg\,\frac{x-y}{z}-5\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{z}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-y}{z}\right)'_x=$$

$$=\frac{z^2}{z^2+\left(x-y\right)^2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{z}{z^2+\left(x-y\right)^2};$$

$$F'_y=\left(arctg\,\frac{x-y}{z}-5\right)'_y=-\frac{z}{z^2+\left(x-y\right)^2};$$

$$F'_z=\left(arctg\,\frac{x-y}{z}-5\right)'_z=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{z}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-y}{z}\right)'_z=$$

$$=-\frac{z^2}{z^2+\left(x-y\right)^2}\cdot\frac{1}{z^2}=-\frac{1}{z^2+\left(x-y\right)^2}$$

| |
|---|
| Запишемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$: $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z}{z^2+(x-y)^2}\Bigg/\left(-\frac{1}{z^2+(x-y)^2}\right)=z;$$ $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z^2+(x-y)^2}\Bigg/\left(-\frac{1}{z^2+(x-y)^2}\right)=-z$$ |

## 1.6 Застосування частинних похідних

### 1.6.1 Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Якщо рівняння поверхні у просторі задано *явно*, тобто $z=f(x,y)$, то *рівняння дотичної площини до поверхні* у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ буде мати такий вигляд | $z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}\Big\vert_{M_0}(x-x_0)+$ $+\frac{\partial f}{\partial y}\Big\vert_{M_0}(y-y_0)$ |
| 2 | Якщо рівняння поверхні у просторі задано *неявно*, тобто $F(x,y,z)=0$, то *рівняння дотичної площини до поверхні* у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ матиме вигляд | $\frac{\partial F}{\partial x}\Big\vert_{M_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\Big\vert_{M_0}(y-y_0)+$ $+\frac{\partial F}{\partial z}\Big\vert_{M_0}(z-z_0)=0$ |

**ПРИКЛАД 1.** Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $2x^2z+3y^2x-4z=0$ у точці $M_0\left(1,-1,1\right)$.

*Розв'язання.* Задана поверхня представлена неявно. Знайдемо спочатку частинні похідні функції $F(x,y,z)=0$:

$$F'_x=\left(2x^2z+3y^2x-4z\right)'_x=4xz+3y^2;$$

$$F'_y=\left(2x^2z+3y^2x-4z\right)'_y=6yx;$$

$$F'_z=\left(2x^2z+3y^2x-4z\right)'_z=2x^2-4.$$

Обчислимо значення частинних похідних у заданій точці $M_0\left(1,-1,1\right)$, тобто коли $x_0=1$, $y_0=-1$, $z_0=1$:

$$F'_x\left(M_0\right)=4\cdot1\cdot1+3\left(-1\right)^2=7; \quad F'_y\left(M_0\right)=6\cdot\left(-1\right)\cdot1=-6;$$

$$F'_z\left(M_0\right)=2\cdot1^2-4=-2.$$

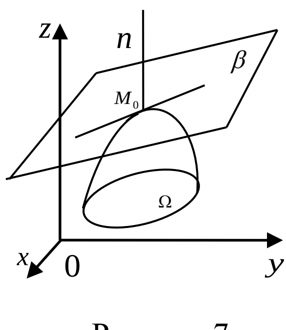
Запишемо рівняння дотичної площини:

$$7(x-1)-6(y+1)-2(z-1)=0,$$

відкриємо дужки та приведемо подібні й матимемо остаточну відповідь:

$$7x-7-6y-6-2z+2=0,$$

$$7x-6y-2z-11=0$$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | Пряма, перпендикулярна до дотичної площини $\beta$ у точці дотику $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, називається *нормаллю* (на рисунку це пряма $n$) до поверхні $\Omega$ у зазначеній точці (рис. 7) |  Рисунок 7 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | Якщо рівняння поверхні у просторі задано *явно*, тобто $z = f(x,y)$, то *рівняння нормалі* має вигляд | $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{-1}$$ |
| 5 | Якщо рівняння поверхні у просторі задано *неявно*, тобто $F(x,y,z)=0$, то *рівняння нормалі* має вигляд | $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right\|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right\|_{M_0}}$$ |

**ПРИКЛАД 2.** Записати рівняння нормалі у точці $M_0\left(1,2,5\right)$ до поверхні $z=4x^2-9y^2$.

*Розв'язання.* У даному випадку рівняння поверхні задано явно, тобто задане рівняння розв'язане відносно $z$. Скористаємось формулами, де $f(x,y)=4x^2-9y^2$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(4x^2-9y^2\right)'_x=8x;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\left(4x^2-9y^2\right)'_y=-18y.$$

Обчислимо $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=8\cdot 1=8;\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-18\cdot 2=-36.$

Запишемо рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{36}=\frac{z-5}{-1}$$

*Зауваження.* Координати напрямного вектору нормалі $\vec{s}=\{k,l,m\}$ [12] до поверхні $F(x,y,z)=0$ у точці $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ пропорційні значенням відповідних частинних похідних цієї функції, обчислених у цій точці:

$$k = \lambda \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0};\ l = \lambda \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0};\ m = \lambda \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}$$

## 1.6.2 Дослідження функції двох змінних на екстремум

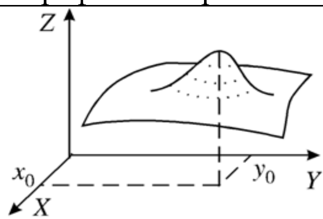
<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Максимумом (рис. 8) (мінімумом) (рис. 9) функції $z = f(x, y)$ називається таке її значення $f(x_0, y_0)$, яке більше (менше) усіх інших значень, що приймає функція у точках, достатньо близьких до точки $M_0(x_0, y_0)$, та відрізняється від неї. При цьому значення $f(x_0, y_0)$ називається екстремальним значенням функції (відповідно максимальним або мінімальним)</td><td>

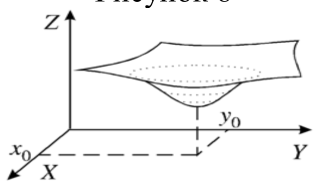
Рисунок 8


Рисунок 9</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Зауваження 1. Говорять, що функція $f(x, y)$ має у точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум (або досягає у точці $M_0$ екстремуму).<br>Зауваження 2. За визначенням точка екстремуму є внутрішньою точкою області визначення функції, оскільки функція визначена в деякій (хоча б малій) області, що містить цю точку.<br>Зауваження 3. Розглянутий екстремум є строгим внутрішнім локальним екстремумом. Його не треба плутати з глобальним екстремумом у деякій заданій</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">області $D$ (найбільшим $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ та найменшим $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ значенням функції в області $D$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Теорема (необхідні умови гладкого екстремуму). Якщо диференційована функція $z = f(x,y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю (дод. Д)</td><td>$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 4. Точка $M_0(x_0, y_0)$, координати якої пере-творюють в нуль обидві частинні похідні функції $z = f(x,y)$, називається стаціонарною точкою цієї функції<br>Зауваження 5. Необхідна умова досягнення диференційованої функції $z = f(x,y)$ екстремуму у точці $M_0(x_0, y_0)$ геометрично виражається в тому, що дотична площина до поверхні – графіку функції у відповідній їй точці – паралельна площині незалежних змінних</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Теорема (достатні умови гладкого екстремуму).<br>1) Якщо визначник $\Delta$ – додатний, то $M_0$ – точка екстремуму, причому<br>а) $M_0$ – точка мінімуму, якщо $A > 0$; б) $M_0$ – точка максимуму, якщо $A < 0$.<br>2) Якщо визначник $\Delta$ – від'ємний, то у точці $M_0$</td><td>$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$<br>де $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$,<br>$B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{M_0}$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>екстремум відсутній ($M_0$ – сідлова точка функції $z=f(x,y)$) (Додаток Ж).<br>3) Якщо визначник $\Delta$ дорівнює нулю, то у точці $M_0$ екстремум може бути, а може і не бути</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум:<br>1) знаходимо частинні похідні першого порядку;<br>2) визначаємо стаціонарні точки, розв'язуючи систему (необхідна умова екстремуму): $\begin{cases} \partial z/\partial x\,\big|_{M_0}=0; \\ \partial z/\partial y\,\big|_{M_0}=0; \end{cases}$<br>3) знаходимо частинні похідні другого порядку;<br>4) обчислюємо значення частинних похідних другого порядку в знайдених стаціонарних точках;<br>5) знаходимо визначник (достатня умова екстремуму): $\Delta = AC-B^2$;<br>6) визначаємо наявність чи відсутність екстремуму та обчислюємо екстремальне значення функції</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Знайти екстремум функції $z=x^3+y^3+9xy$.<br>Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:<br>$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+9y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+9x.$$<br>Для визначення стаціонарних точок скористаємось необхідною умовою екстремуму функції двох змінних, прирівняємо знайдені частинні похідні до нуля та розв'яжемо систему з цих двох рівнянь: $\begin{cases} 3x^2+9y=0; \\ 3y^2+9x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+3y=0; \\ y^2+3x=0. \end{cases}$</td></tr>
</table>

Виразимо $y$ з першого рівняння $y=-\frac{1}{3}x^2$ та підставимо його у друге рівняння системи, отримаємо:

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2+3x=0, \quad x^4+27x=0, \quad x\left(x^3+27\right)=0, \quad x_1=0,$$

$$x^3+27=0, \quad (x+3)(x^2-3x+9)=0, \quad x+3=0, \quad x_2=-3,$$

рівняння $x^2-3x+9=0$ має лише комплексні корені, тож ми їх не розглядатимемо. Визначимо значення ординати $y_1=0$, $y_2=-3$. Тож маємо дві стаціонарні точки $M_1\left(0,0\right)$ та $M_2\left(-3,-3\right)$, в яких можливо є екстремум, маємо це перевірити за допомогою достатньої умови екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=9, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Обчислимо значення цих частинних похідних у кожній з найдених стаціонарних точок та обчислимо визначник:

1) точка $M_1\left(0,0\right)$:

$$A_1=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=0, \ B_1=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=9, \ C_1=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1}=0;$$

$$\Delta_1=A_1C_1-B_1^2=0\cdot 0-9^2=-81<0;$$

2) точка $M_2\left(-3,-3\right)$:

$$A_2=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2}=-18, \ B_2=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_2}=9, \ C_2=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2}=-18;$$

$$\Delta_2=A_2C_2-B_2^2=18\cdot 18-9^2=243>0.$$

Згідно достатньої умови екстремуму, в точці $M_1\left(0,0\right)$ немає екстремуму, а в точці $M_2\left(-3,-3\right)$ функція має максимум, оскільки $\Delta_2 > 0$, $A_2 < 0$, при цьому

$$z_{\max} = f(-3,-3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 9\cdot(-3)\cdot(-3) = 27$$

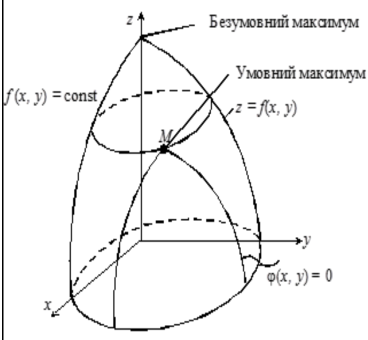
**ПРИКЛАД 2.** Знайти екстремум функції $z = x^2 - y^2$.

*Розв'язання.* Знаходимо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, та прирівнюємо їх до нуля. Як бачимо, стаціонарною точкою буде лише одна точка $O(0,0)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їх значення у стаціонарній точці:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,\ \Delta = -2\cdot 2 - 0 < 0,$$

тобто стаціонарна точка $O(0,0)$ не є точкою екстремуму, і функція $z = x^2 - y^2$ екстремуму не має

## 1.6.3 Умовний екстремум функції двох змінних. Метод Лагранжа

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Умовним екстремумом функції* $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0, y_o)$ (рис. 10) називається екстремум цієї функції, досягнутий за умови, що змінні $x$ і $y$ в околі даної точки задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x,y) = 0$ | <br>Рисунок 10 |

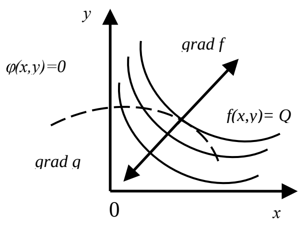
<table>
<tr><td>2</td><td>Функція Лагранжа</td><td>$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, де параметр $\lambda$ називають множником Лагранжа</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Необхідні умови екстремуму задаються системою рівнянь, з якої визначаються стаціонарні точки:</td><td>$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0; \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 1. Назва «умовний» екстремум пов'язана з тим, що на змінні накладено додаткову умову $\varphi(x,y)=0$. Якщо з рівняння зв'язку можна виразити одну змінну через іншу, то завдання визначення умовного екстремуму зводиться до задачі знаходження звичайного екстремуму функції однієї змінної.<br>Зауваження 2. У точці умовного екстремуму градієнти функцій $f(x,y)$ й $\varphi(x,y)$ – колінеарні вектори.<br>

Рисунок 11<br>На рисунку 11 представлено геометричний зміст методу множників Лагранжа: суцільними лініями зображено лінії рівня $f(x,y)=Q$ функції $f(x,y)$, а штрихованою лінією функція $\varphi(x,y)=0$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Достатньою умовою, з якої можна з'ясувати характер екстремуму, є знак $d^2F$.<br>Якщо $d^2F>0$ в стаціонарній точці, то функція</td><td>$$d^2F=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dxdy+$$ $$+F''_{yy}dy^2$$</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | $z=f\left(x,y\right)$ має в даній точці *умовний мінімум*, якщо ж $d^2F<0$, то *умовний максимум* | |
| 5 | *Гессіан* функції Лагранжа: | $\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$ |
| 6 | Якщо $H>0$, то $d^2F<0$, що вказує на умовний максимум. Аналогічно, якщо $H<0$ маємо $d^2F>0$, тобто маємо умовний мінімум функції | $H=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$ |
| 7 | *Алгоритм дослідження функції двох змінних на умовний екстремум:*<br>1) Скласти функцію Лагранжа:<br>$F\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)+\lambda\varphi\left(x,y\right).$<br>2) Розв’язати систему $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0; \\ \varphi\left(x,y\right)=0. \end{cases}$<br>3) Визначити характер екстремуму в кожній із знайдених у попередньому пункті стаціонарних точок. Для цього застосувати будь-який з зазначених раніше способів:<br>а) скласти визначник $H$ і з'ясувати його знак;<br>б) з урахуванням рівняння зв'язку обчислити знак | |

**ПРИКЛАД.** Знайти екстремуми функції $z = xy$ за умови, що $x^2 + y^2 = 4$.

*Розв'язання.* Складемо функцію Лагранжа:

$$F(x, y) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right).$$

Продиференціюємо її: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2x\lambda$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2y\lambda$.

Складемо та розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y + 2x\lambda = 0; \\ x + 2y\lambda = 0; \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x\lambda; \\ x + 2\left(-2x\lambda\right)\lambda = 0; \\ x^2 + \left(-2x\lambda\right)^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Розглядаючи друге рівняння $x - 4x\lambda^2 = 0$, $x\left(1 - 4\lambda^2\right) = 0$, маємо розв'язок: $x = 0$ або $1 - 4\lambda^2 = 0$, тобто $\lambda = \pm 1/2$. При $x = 0$: $y = 0$, але точка $O(0,0)$ не задовольняє умові $x^2 + y^2 = 4$. Отже, $x \neq 0$, $\lambda_1 = 1/2$ або $\lambda_2 = -1/2$. Підставимо значення $\lambda_1 = 1/2$ у перше рівняння системи і отримаємо $y = -x$, а з третього рівняння матимемо значення $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, знайдемо відповідні значення $y_{1,2} = \mp\sqrt{2}$. Аналогічно визначаємо значення $x$ та $y$ при $\lambda_2 = -1/2$: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Таким чином, ми отримали чотири точки: $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_3(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Для перевірки достатніх умов існування запишемо визначник $H$ у довільній точці $M\left(x, y\right)$, враховуючи $\varphi'_x\big|_M = 2x$, $\varphi'_y\big|_M = 2y$, $F''_{xx}\big|_M = 2\lambda = -\dfrac{y}{x}$, $F''_{yy}\big|_M = 2\lambda = -\dfrac{y}{x}$, $F''_{xy}\big|_M = 1$,

$$H=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -\dfrac{y}{x} & 1 \\ 2y & 1 & -\dfrac{y}{x} \end{vmatrix}=12xy+\frac{4y^3}{x}.$$

Обчислимо значення визначника у кожній критичній точці:

$$H\big|_{M_1}=12\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+\frac{4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2}}=-32<0,$$

$$z_{\min}=z(M_1)=\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=-2;$$

$$H\big|_{M_2}=12\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3}{-\sqrt{2}}=-32<0,$$

$$z_{\min}=z(M_2)=\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=-2;$$

$$H\big|_{M_3}=12\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2}}=32>0,$$

$$z_{\max}=z(M_3)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2;$$

$$H\big|_{M_4}=12\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+\frac{4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3}{-\sqrt{2}}=32>0,$$

$$z_{\max}=z(M_4)=-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=2$$

## 1.6.4 Знаходження найбільшого та найменшого значення функції двох змінних

*Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z=f(x,y)$ у замкненій області $D$:*

1) побудувати область $D$ в прямокутній системі координат

$Oxy$. Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області $D$;

2) знайти стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$. Виділити з них ті, що лежать в області $D$. Обчислити значення функції у виділених точках;

3) знайти значення функції в усіх кутових точках межі області $D$;

4) на кожній ділянці межі області $D$ перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції $z = f(x, y)$ врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;

5) порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ та найбільше – глобальний максимум $\max\limits_{(x,y)\in D} z$

*Зауваження 1.* У даному випадку немає необхідності досліджувати функцію на екстремум за допомогою частинних похідних другого порядку.

*Зауваження 2.* Для функції $z = f(x, y)$ границя області складається з декількох дуг (відрізків), рівняння яких $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ чи $x = \varphi(y)$, де $c \le y \le d$, тому на відповідних дугах межами даної функціє є функції однієї змінної

$$z = f(x, f(x)) = z(x), \text{ або } z = f(\varphi(y), y) = z(y).$$

Якщо границя області задана параметричними рівняннями

$$x = \varphi_1(t),\ x = \varphi_2(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta),$$

то дана функція також перетворюється у функцію однієї змінної:

$$z = f(x, y) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = z(t)$$

**ПРИКЛАД.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у трикутній області, обмеженій лініями $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

*Розв'язання.* Побудуємо задану трикутну область $D$ у декартовій системі координат (рис. 12). Зауважимо, що рівняння $x = 0$ та $y = 0$ є рівняннями осей координат $Oy$ та $Ox$, а геометричним образом рівняння $2x + 3y - 12 = 0$ – пряма, що відтинає на осях $Ox$, $Oy$ відповідно відрізки у 6 та 4 одиниць довжини [12].

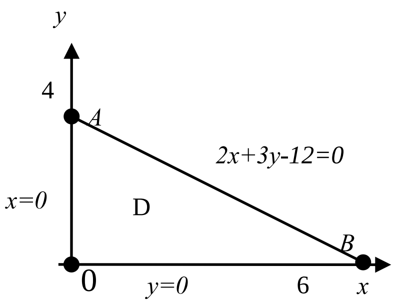



Рисунок 12

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x,$$

прирівняємо їх до нуля: $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0; \\ 2y - x = 0, \end{cases}$ розв'яжемо цю систему та отримаємо стаціонарну точку $M_1\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$, яка належить області $D$. Обчислимо значення функції в цій точці $M_1$:

$$z_1 = z(M_1) = \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{112}{25}.$$

Знайдемо найбільше й найменше значення функції на межі трикутної області $D$. Розіб'ємо її на три відрізка $OA$, $OB$, $AB$, на кожному з яких можуть бути свої критичні точки. Крім того, слід врахувати ще й кінці відрізків, тобто точки $A, B, O$.

Розглянемо відрізок $OA$, рівняння якого $x = 0$, при цьому

$0 \le y \le 4$. На цьому відрізку задана функція перетворюється у функцію однієї змінної $y$: $z = f(0, y) = z\left(y\right) = y^2$, похідна якої $z' = 2y$ обертається в нуль при $y = 0$. Обчислимо значення функції у точці $M_2\left(0,0\right)$:

$$z_2 = z(M_2) = 0.$$

На відрізку $OB$: $y = 0$, $0 \le x \le 6$, тому

$$z = f(x,0) = z\left(x\right) = x^2 - 4x.$$

Знаходимо критичні точки функції $z\left(x\right)$:

$$z' = 2x - 4, 2x - 4 = 0, \ x = 2.$$

Обчислимо значення функції у точці $M_3\left(2,0\right)$:

$$z_3 = z(M_3) = 2^2 - 0 + 0 - 4 \cdot 2 = -4.$$

На відрізку $AB$, рівняння якого $2x + 3y - 12 = 0$, $y = 4 - \frac{2}{3}x$, тож функція має вигляд

$$z(x) = x^2 - x\left(4 - \frac{2}{3}x\right) + \left(4 - \frac{2}{3}x\right)^2 - 4x = \frac{19}{9}x^2 - \frac{56}{3}x + 16.$$

Знайдемо критичні точки отриманої функції $z(x)$:

$$z'(x) = \frac{38}{9}x - \frac{56}{3}, \quad z'(x) = 0, \ \frac{38}{9}x - \frac{56}{3} = 0, \ x = \frac{84}{19}, \ y = \frac{20}{19}.$$

Точка $M_4\left(\frac{84}{19}, \frac{20}{19}\right)$ належить області $D$, тож обчислимо значення функції у цій точці:

$$z_4 = z(M_4) = \left(\frac{84}{19}\right)^2 - \frac{84}{19} \cdot \frac{20}{19} + \left(\frac{20}{19}\right)^2 - 4 \cdot \frac{84}{19} = -\frac{608}{361}.$$

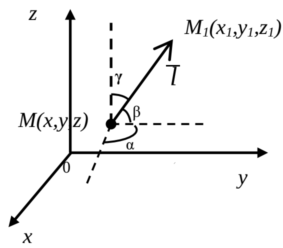
Обчислимо значення функції у вершинах $A, B, O$:

$$z_5 = z(A) = z(0,4) = 0^2 - 0 + 4^2 - 4 \cdot 0 = 16,$$

$$z_6 = z(B) = z(6,0) = 6^2 - 0 + 0^2 - 4 \cdot 6 = 12,$$

| |
|---|
| $$z_7 = z(0) = z(0,0) = z_2 = 0.$$ Із отриманих значень функції $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ обираємо найбільше та найменше значення, отже: $$z_{найб} = \max_{(x,y)\in D} z = z_5 = z(A) = 16,$$ $$z_{найм} = \min_{(x,y)\in D} z = z_3 = z(M_3) = -4$$ |

## 1.7 Похідна за напрямком. Градієнт

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Похідною функції* $u = u(x, y, z)$ *у точці* $M(x, y, z)$ *за напрямком вектора* $\vec{l}$ називається границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$ (рис. 13).<br>Різниця $\Delta_l u$ значень функції в точках $M_1$ і $M$ називається *приростом функції* $u = u(x, y, z)$ *у напрямку вектора* $\vec{l}$ |  <br>Рисунок 13<br>$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l},$$ $$\Delta_l u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - -u(x, y, z)$$ |
| *Зауваження 1.* Згідно визначення похідної за напрямком, якщо напрямок вектора $\vec{l}$ співпадає з додатним напрямом осі $Ox$, тобто $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \pi/2$, то границя дорівнюватиме частинній похідній від функції $u = u(x, y, z)$ за змінною $x$. Аналогічну картину ми отримаємо, якщо напрям $\vec{l}$ співпадатиме з напрямом осей $Oy$ та $Oz$ | | |

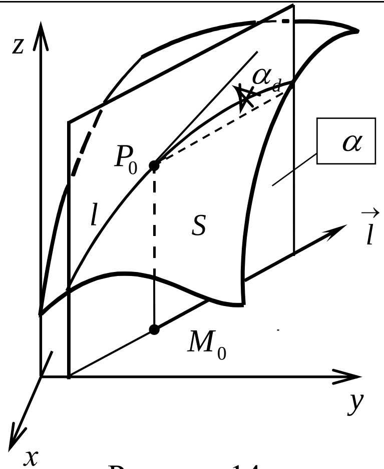



Рисунок 14

*Зауваження 2.* (*геометричний зміст похідної за напрямком).* Нехай задане плоске скалярне поле (додаток Л) $z = f(x, y)$. Функції $z = f(x, y)$ відповідає деяка поверхня $S$. Якщо через точку $M_0(x_0, y_0)$ і відкладений від неї вектор $\vec{l}$ провести вертикальну площину $\alpha$, ($\alpha \parallel Oz$), то ця площина перетне поверхню $S$ вздовж деякої просторової лінії $l$. Тангенс кута $\alpha_d$ між дотичною до лінії перерізу $l$ у точці $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ і горизонтальною координатною площиною $Oxy$ дорівнює значенню похідної за напрямком $\frac{\partial z}{\partial l}$ у відповідній точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$tg\,\alpha_d = \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}.$$

*Зауваження 3.* Якщо точка $M$ фіксована, то величина похідної $u_l'$ залежатиме лише від напрямку вектора $\vec{l}$ .

*Зауваження 4.* Абсолютна величина похідної $u_l'$ за напрямком $\vec{l}$ визначає величину швидкості, а знак похідної – характер зміни функції $u$ (зростання або спадання)

| | | |
|---|---|---|
| 2 | Якщо функція $u = u(x, y, z)$ диференційована, то її похідна $u_l'$ за будь-яким напрямком $\vec{l}$ існує та обчислюється за формулою | $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ |

**ПРИКЛАД 1.** Знайти похідну функції $z=\ln\sqrt{2x^2+2y^2}$ за напрямом вектору $\vec{l}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ у точці $M_0(1,-1)$.

*Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2}}\cdot\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+2y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

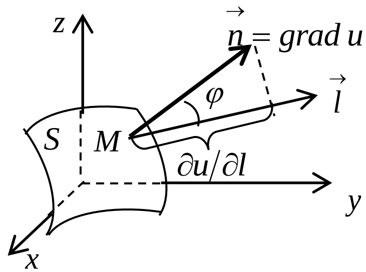
Обчислимо значення цих частинних похідних у заданій точці $M_0(1,-1)$ і отримаємо: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\dfrac{1}{2}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\dfrac{1}{2}$.

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$. Обчислимо спочатку його довжину $\left|\vec{l}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$. Тепер визначимо напрямні косинуси за формулами $\cos\alpha=\dfrac{x_{\vec{l}}}{\left|\vec{l}\right|}$, $\cos\beta=\dfrac{y_{\vec{l}}}{\left|\vec{l}\right|}$.

Оскільки вектор $\vec{l}$ є одиничним вектором, то його напрямні косинуси співпадають з його координатами: $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{2}$. Обчислимо похідну за напрямком заданого вектора: $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Як бачимо значення похідної за заданим напрямком додатне, тому можна зробити висновок, що функція зростає

| | | |
|---|---|---|
| 3 | *Градієнтом функції* $u=u(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого є значення частинних похідних цієї функції (дод. Ж) | $\mathrm{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | *Зв'язок градієнта функції з похідною за напрямом:* похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ за напрямком вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта $grad\, u$ на цей вектор, тобто $$\frac{\partial u}{\partial l} = \lvert gradu \rvert \cdot \cos\varphi,$$ де $\varphi$ – це кут між вектором $grad\, u$ та вектором $\vec{l}$ (рис. 15) |   Рисунок 15 $$\frac{\partial u}{\partial l} = np_{\vec{l}}\, \mathrm{grad}\, u$$ |
| 5 | Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ скалярного поля (дод. И) $u = u(x, y, z)$ у довільній точці $M$ за напрямком вектора, який перпендикулярний до градієнту, дорівнює нулю | $\vec{l} \perp gradu \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial l} = 0$ |
| 6 | *Фізичний зміст градієнта функції:* градієнт указує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості | $grad\, u = \vec{l}_{\max}$; $$\lvert \mathrm{grad}\, u \rvert = \left( \frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max}$$ |
| | *Зауваження. Градієнт скалярного поля визначається самим полем* і не залежить від вибору системи координат | |

<table>
<tr>
<td>7</td>
<td>

*Геометричний зміст градієнта:* градієнт $grad\, u$ скалярного поля (дод. И) $u = u(x, y, z)$ у кожній точці $M(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня $S$: $u(x, y, z) = C$, яка проходить через цю точку (рис. 16).

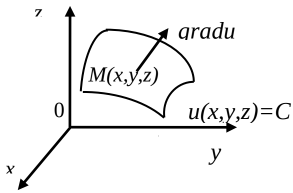



Рисунок 16

Тобто градієнт $grad\, u$ можна прийняти за вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні рівня $S$: $u(x, y, z) = C$ у відповідній точці $M(x, y, z)$: $\quad grad\, u \perp S \;\Rightarrow\; \vec{n} = grad\, u$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

**ПРИКЛАД 2.** Знайти градієнт функції $u = 3x^2 + 2y^2 z - z^2 x$ у точці $M(2, -2, 1)$.

*Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні першого порядку та обчислимо їх значення в заданній точці:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (6x - z^2)\big|_M = 6 \cdot 2 - 1^2 = 11, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 4yz\big|_M = 4 \cdot (-2) \cdot 1 = -8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (2y^2 - 2zx)\big|_M = 2(-2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = -12,$$

$$\mathrm{grad}\, u = 11\vec{i} - 8\vec{j} - 12\vec{k}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

**ПРИКЛАД 3.** Знайти величину найбільшої швидкості зміни функції $u = 7x^2 y - \frac{7}{2} y^2 z^2 + \frac{4}{3} z^3$ у точці $M(1, 0, 2)$.

*Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні першого порядку та обчислимо їх значення в заданій точці:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 14xy\big|_M = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (7x^2 - 7yz^2)\big|_M = 7 \cdot 1^2 - 7 \cdot 0 \cdot 2^2 = 7,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (-7y^2 z + 4z^2)\big|_M = -7 \cdot 0^2 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = 16.$$

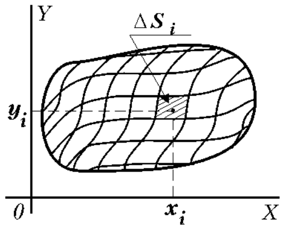
Обчислимо величину найбільшої швидкості зміни функції:

$$|\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{7^2 + 16^2} = \sqrt{305} \text{ (од. виміру)}$$

</td>
</tr>
</table>

# 2. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

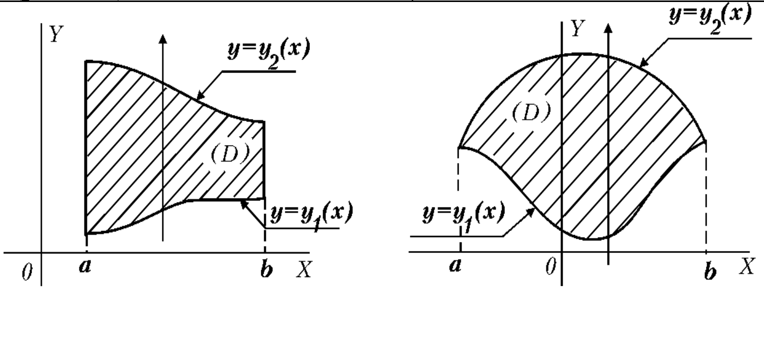
## 2.1 Подвійний інтеграл: поняття і властивості

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Інтегральною сумою* функції $f(x;y)$ по області $D$ називається сума добутків значень функції в обраних точках $(x_i;y_i)$ на площі відповідних часткових (елементарних) областей $\Delta S_i$ (рис.17) |  Рисунок 17 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i$ |
| 2 | *Подвійним інтегралом* від функції $f(x;y)$ по області $D$ називається скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття області $D$, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні області $D_i$ та від вибору точок $(x_i;y_i)$ на них | $\iint_D f(x;y)dS =$ $= \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i$, де $x, y$ - *змінні інтегрування,* $f(x;y)$ - *підінтегральна функція,* $dS$ - *елемент (диференціал) площі,* $f(x;y)dS$ - *підінтегральний вираз,* $D$ – *область інтегрування* |
| 3 | *Геометричний зміст:* якщо функція $f(x;y)$ невід'ємна в області $D$, то подвійний інтеграл дорівнює об'єму циліндричного тіла з осно- | $V = \iint_D f(x;y)dxdy$ |

| | | |
|---|---|---|
| | вою $D$, твірною, яка паралельна осі $Oz$, і обмеженого зверху поверхнею $z = f(x;y)$.<br>*Частинний випадок:* якщо підінтегральна функція в області $D$ площини $xOy$ тотожно дорівнює одиниці $f(x;y) \equiv 1$, то подвійний інтеграл від $dS$ є площа області інтегрування $D$ | $S = \iint\limits_D dxdy$ |
| 4 | *Фізичний зміст:* якщо плоска пластинка $D$ площини $Oxy$ має змінну поверхневу щільність $\mu(x;y)$, то подвійний інтеграл це є маса цієї пластинки | $m = \iint\limits_D \mu(x;y)dxdy$ |
| 5 | *Властивості подвійного інтеграла:*<br><br>1) *почленне інтегрування:* подвійний інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків;<br><br>2) *винесення постійного множника:* постійний множник можна виносити за знак подвійного інтеграла;<br>3) *розбиття області інтегрування на частини:* | 1) $\iint\limits_D [f(x;y) \pm g(x;y)]dxdy =$ $= \iint\limits_D f(x;y)dxdy \pm$ $\pm \iint\limits_D \mathrm{g}(x;y)dxdy$<br>2) $\iint\limits_D k \cdot f(x;y)dxdy =$ $= k \cdot \iint\limits_D f(x;y)dxdy$<br><br>3) $\iint\limits_D f(x;y)dxdy =$ |

| | | |
|---|---|---|
| | якщо область інтегрування розбити на частини, то подвійний інтеграл можна представити у вигляді суми інтегралів за окремими частинами області; | $=\iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy+$ $+\iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy+\ldots+$ $+\iint\limits_{D_n} f(x;y)dxdy$ |
| | 4) *оцінка подвійного інтеграла:* якщо $M$ і $m$ – найбільше і найменше значення функції $f(x;y)$ в області $D$ відповідно, то має місце така оцінка подвійного інтеграла: | 4) $m\cdot S\le\iint\limits_{D} f(x;y)dS\le M\cdot S$ де $S$ - площа області $D$ |
| | 5) *теорема про середнє для подвійного інтеграла:* якщо функція $f(x;y)$ неперервна в області $D$, то справедлива рівність: | 5) $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy=f(C)\cdot S$, де $S$ - площа області $D$, а $C$ - деяка точка цієї області; |
| | Значення функції $f(C)$ називається *середнім значенням функції в області* | $f(C)=\frac{1}{S}\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy$ |
| | *Геометричний зміст теореми про середнє:* об’єм циліндричного тіла дорівнює об’єму рівновеликого циліндра з тією ж основою і висотою, яка дорівнює значенню підінтегральної функції в деякій точці області інтегрування | |

## 2.2 Подвійний інтеграл у прямокутних координатах

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Повторний (двократний) інтеграл* – це інтеграл вигляду: | $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ <br> або <br> $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$ |
| *Зауваження 1.* Повторний інтеграл складається з *зовнішнього* (стоїть на першому місці) та *внутрішнього* (стоїть на другому місці) інтегралів. <br> Спочатку обчислюють внутрішній інтеграл. При цьому одна із змінних $x$ або $y$, в залежності від обраного порядку інтегрування, вважається сталою величиною. Потім обчислюють зовнішній інтеграл, як звичайний визначений інтеграл | | |
| 2 | *Перехід від подвійного інтеграла до повторного* у випадку, якщо область інтегрування $D$ є правильною в напрямку осі $Oy$ (рис. 18) | $\iint\limits_D f(x;y)dxdy =$ <br> $= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ |
| |   Рисунок 18 | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | *Перехід від подвійного інтегралу до повторного* у випадку, якщо область інтегрування $D$ є правильною в напрямку осі $Ox$ (рис. 19) | $\iint\limits_D f(x;y)dxdy =$ $= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$ |

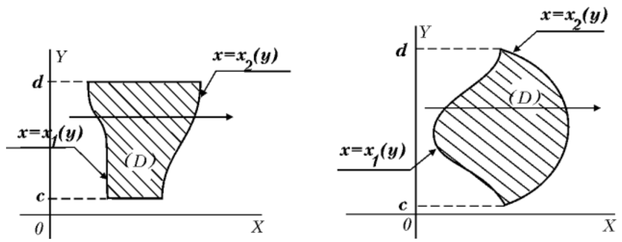



Рисунок 19

*Зауваження 2.* Границі інтегрування у зовнішньому інтегралі завжди є сталими. Границі внутрішнього інтегралу, як правило, є змінними. При розстановці границь інтегрування зручно використовувати «стрілки», які вказують напрям інтегрування: знизу вгору паралельно осі $Oy$ (перший випадок), або зліва направо вздовж осі $Ox$ (другий випадок). При цьому криву, в яку заходить «стрілка», називають *лінією входу,* а криву, з якої виходить «стрілка», *лінією виходу*

**ПРИКЛАД 1.** У подвійному інтегралі $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy$ перейти до повторного і розставити границі інтегрування двома способами $D$: $x^2+y^2=2$, $x^2=y$, $(y>0)$.

*Розв'язання.*

Знайдемо точку перетину ліній $x^2+y^2=2$ і $x^2=y$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2; \\ x^2=y, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+\left(x^2\right)^2=2; \\ x^2=y, \end{cases} \quad \begin{cases} x^4+x^2-2=0; \\ x^2=y, \end{cases}$$

$$x^4+x^2-2=0,\ t=x^2,\ t^2+t-2=0,$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9,$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \; t_2 = \frac{-1+3}{2} = 1,$$

$x^2 = -2$ – не має дійсних коренів,

$$x^2 = 1;$$

$$x = \pm 1; \; y = 1.$$

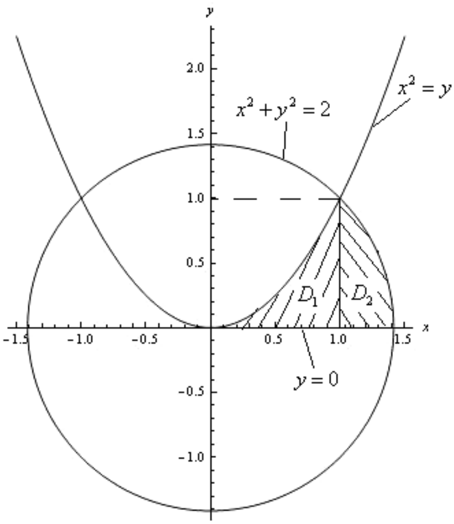



Рисунок 20

1 спосіб. Розглянемо область інтегрування у напрямку осі $Oy$ (рис. 20): вона має одну лінію входу $y = 0$ і дві лінії виходу $y = x^2$; $y = \sqrt{2 - x^2}$, пряма $x = 1$ ділить область $D$ на дві частини – $D_1$ и $D_2$ (рис. 20).

Таким чином, подвійний інтеграл розбивається на суму двох повторних:

$$D_1 : 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le x^2;$$

$$D_2 : 1 \le x \le \sqrt{2}, \; 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2}.$$

Отже, $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy.$

2 спосіб. Розглянемо область інтегрування у напрямку осі $Ox$ (рис. 21): вона є правильною, тому що має одну лінію входу $x = \sqrt{y}$ і одну лінію виходу $x = \sqrt{2 - y^2}$, тобто:

$$D : 0 \le y \le 1, \; \sqrt{y} \le x \le \sqrt{2 - y^2},$$

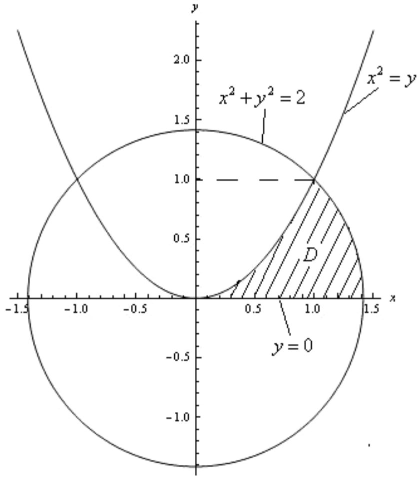



Рисунок 21

тоді:

$$\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx$$

**ПРИКЛАД 2.** У подвійному інтегралі $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy$ по області $D$ перейти до повторного і розставити границі інтегрування двома способами, якщо область $D$: $x+y=2$, $y \le 1$, $x=0$, $y=0$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування.

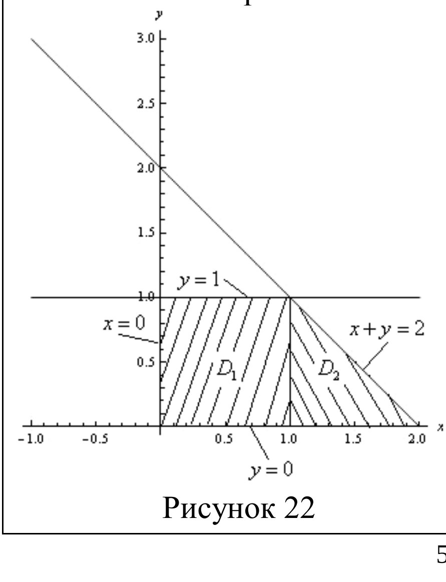



Рисунок 22

1 спосіб. Розглянемо область інтегрування $D$ у напрямку осі $Oy$ (рис. 22): вона має одну лінію входу $y=0$ і дві лінії ви-ходу $y=1$ ; $y=2-x$, пря-ма $x=1$ ділить область $D$ на дві частини – $D_1$ и $D_2$. Таким чином, подвійний інтеграл розбивається на суму двох повторних:

$$D_1: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,$$

$$D_2: 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x.$$

Отже, $\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x;y)dy$.

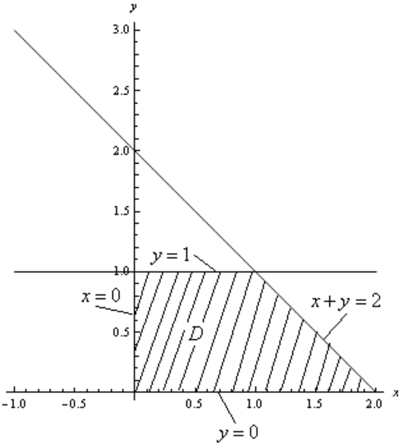



Рисунок 23

2 спосіб. Розглянемо область інтегрування $D$ у напрямку осі $Ox$ (рис. 23): вона має одну лінію входу $x=0$ і одну лінію виходу $x = 2 - y$.

Таким чином,

$$D: 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2 - y.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} f(x;y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)dx$$

**ПРИКЛАД 3.** Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f\left(x;y\right)dy$.

*Розв'язання*. Запишемо область інтегрування:

$$D: 0 \le x \le 4,\ \sqrt{4x - x^2} \le y \le 2\sqrt{x}.$$

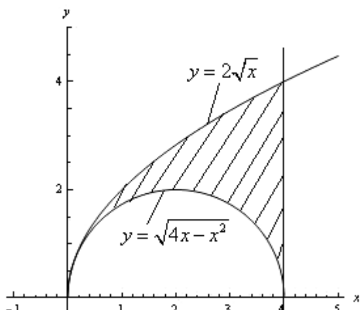



Рисунок 24

Зобразимо область інтегрування (рис. 24): $x=0$, $x=4$ – прямі, паралельні осі $Oy$; $y = \sqrt{4x - x^2}$ – верхня половина кола з центром у точці $\left(2;0\right)$ і радіусом $2$:

$$y^2 = 4x - x^2,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + y^2 = 0,$$

$$\left(x-2\right)^2+y^2=4;$$

$y=2\sqrt{x}$ – верхня гілка параболи.

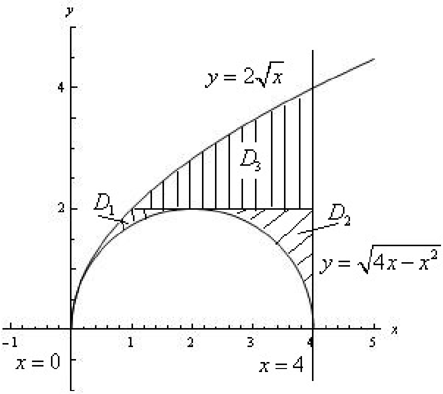



Рисунок 25

Змінимо порядок інтегрування, тобто розставимо межі інтегрування в такому порядку: зовнішній за $dy$, внутрішній за $dx$. В данному випадку область інтегрування неправильна (рис. 25), тому прямою $y=2$ ділимо область на три частини – $D_1$, $D_2$ і $D_3$. Таким чином, подвійний інтеграл розбивається на суму трьох повторних. З рівнянь усіх ліній виразимо $x$:

$$y=\sqrt{4x-x^2}:\ \left(x-2\right)^2+y^2=4,\ \left(x-2\right)^2=4-y^2,$$

$$x-2=\pm\sqrt{4-y^2},\ x=\pm\sqrt{4-y^2}+2;$$

$$y=2\sqrt{x}:\ y^2=4x,\ x=\frac{y^2}{4},$$

$$D_1:0\le y\le 2,\ \frac{y^2}{4}\le x\le -\sqrt{4-y^2}+2,$$

$$D_2:0\le y\le 2,\ \sqrt{4-y^2}+2\le x\le 4,\ D_3:2\le y\le 4,\ \frac{y^2}{4}\le x\le 4.$$

Таким чином, $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f\left(x;y\right)dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{-\sqrt{4-y^2}+2} f(x;y)dx+$

$$+\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{4-y^2}+2}^{4} f(x;y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x;y)dx$$

**ПРИКЛАД 4.** Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f\left(x;y\right)dy$.

*Розв'язання.* Запишемо область інтегрування:

$$D: 0 \le x \le 1,\ 1-x \le y \le 2-x.$$

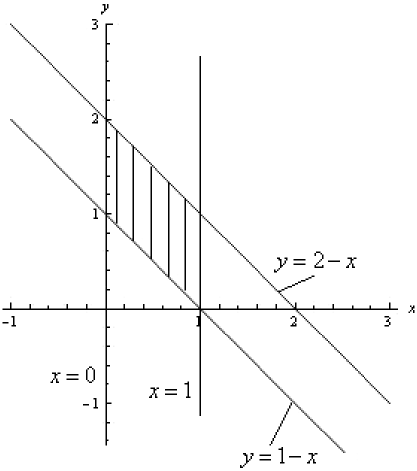



Рисунок 26

Зобразимо область інтегрування (рис. 26): $x=0$, $x=1$ – прямі, паралельні осі $Oy$, $y=1-x$ – пряма, яка проходить через точки $(0;1)$, $(1;0)$, $y=2-x$ – пряма, яка проходить через точки $(0;2)$, $(2;0)$.

Змінимо порядок інтегрування, тобто розставимо межі інтегрування у такому порядку: зовнішній за $dy$, внутрішній за $dx$. У данному випадку область інтегрування неправильна, тому прямою $y=1$ ділимо область на дві частини – $D_1$ і $D_2$ (рис. 27). Таким чином, подвійний інтеграл розбивається на суму двох повторних.

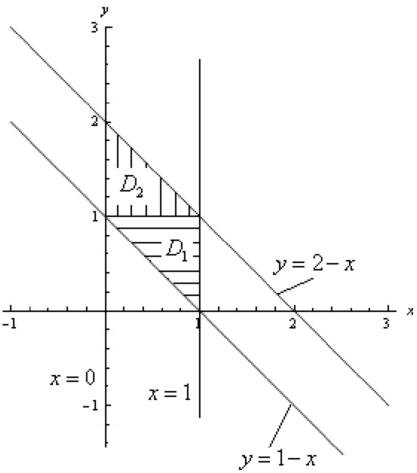



Рисунок 27

З рівнянь усіх ліній виразимо $x$:

$$y=1-x:\ x=1-y;$$

$$y=2-x:\ x=2-y.$$

Запишемо границі інтегрування:

$$D_1: 0 \le y \le 1,\ 1 - y \le x \le 1,$$

$$D_2: 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2 - y.$$

Таким чином, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x;y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{1} f(x;y)dx +$

$$+\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)dx$$

## 2.3 Подвійний інтеграл у полярних координатах

<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Формули переходу від прямокутних до полярних координат у подвійному інтегралі (рис. 28):</td><td>

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2;\ dxdy = \rho d\rho d\varphi;$$

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">

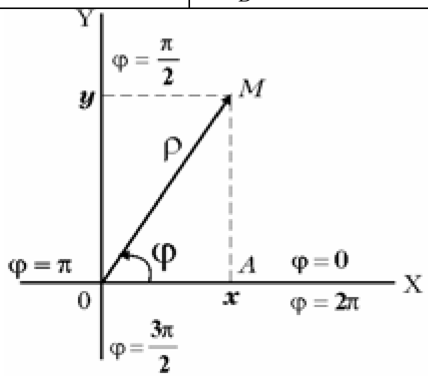



Рисунок 28

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

*Зауваження 1*. Рівняння ліній у полярних координатах, як правило, мають вигляд $\rho = \rho(\varphi)$, а не $\varphi = \varphi(\rho)$, тому внутрішній інтеграл майже завжди обчислюють за змінною $\rho$, а зовнішній – за $\varphi$.

*Зауваження 2.* Як і в прямокутній системі координат, при розстановці границь інтегрування зручно застосовувати «срілку», яка перетинає область інтегрування. Для полярної системи координат «стрілка» – це промінь, який виходить із полярного полюсу і перетинає границі області на лінії входу та лінії виходу.

*Зауваження 3.* Застосування полярної системи координат при обчисленні подвійних інтегралів зручно в тих випадках, коли границя області інтегрування $D$ утворена лініями, рівняння яких в полярних координатах мають більш простий аналітичний вигляд, ніж в декартовій системі координат, наприклад, різні кола, або їх частини, лемніската Бернулі та ін.

*Зауваження 4*. Приклади перетворення рівнянь ліній при переході від декартових координат до полярних дивитись у додатку К

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Розглянемо чотири основні випадки переходу від подвійного до повторного інтегралу:

а) полюс в середині або на границі області інтегрування (рис. 29), О – полярний полюс, ОА – полярна вісь:

$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\rho;$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

</td></tr>
</table>

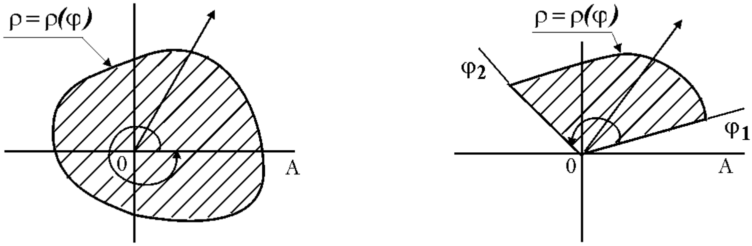



Рисунок 29

б) полюс зовні області інтегрування (рис. 30):

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho\ ;$$

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

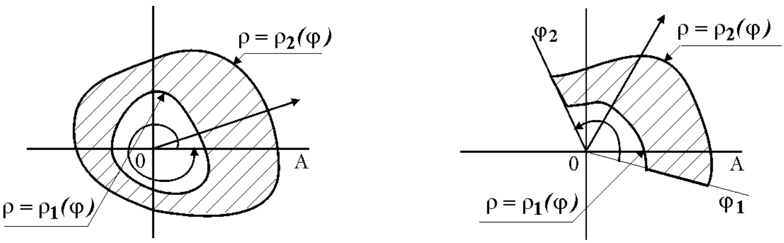



Рисунок 30

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D arctg\dfrac{y}{x}e^{x^2+y^2}dxdy$, застосувавши полярні координати, де область інтегрування $D$ задано нерівностями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq R^2$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис. 31): $x=0$ – вісь $Oy$, $y=0$ – вісь $Ox$, $x^2+y^2=R^2$ – коло з центром у початку координат і радіусом $R$.

Перейдемо до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi$$

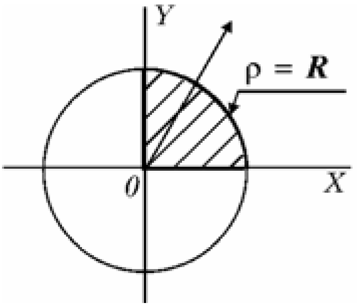



Рисунок 31

Тоді $D: 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le R$,

$$arctg\,\frac{y}{x}e^{x^2+y^2} =$$

$$= arctg\,\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}e^{\rho^2} =$$

$$= arctg(tg\varphi)e^{\rho^2} = \varphi e^{\rho^2}.$$

Отже: $\iint\limits_D arctg\,\frac{y}{x}e^{x^2+y^2}dxdy =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R \varphi e^{\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\varphi d\varphi\int\limits_0^R e^{\rho^2}\rho d(\rho^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\varphi\left[e^{\rho^2}\right]_0^R d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(e^{R^2}-1)\varphi d\varphi = \frac{(e^{R^2}-1)}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{e^{R^2}-1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}\cdot(e^{R^2}-1)$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D ydxdy$, де область інтегрування $D$ задано нерівностями $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge 0$, $y \le \sqrt{2ax - x^2}$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис. 32): $y = \sqrt{3}x$ – рівняння прямої, $y = 0$ – вісь $Ox$. Перетворимо рівняння $y = \sqrt{2ax - x^2}$ до канонічного вигляду: $y^2 = 2ax - x^2$, $x^2 - 2ax + y^2 = 0$, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. Отримали рівняння кола з центром у точці $(a; 0)$ і радіусом $R = a$.

Перейдемо до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

$$dxdy = \rho d\rho d\varphi,$$

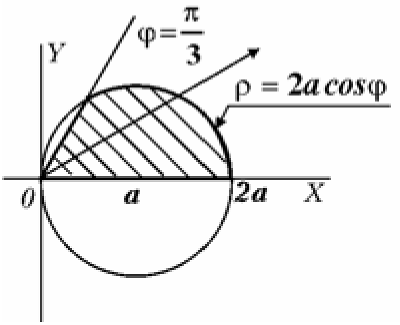



Рисунок 32

рівняння області $D$ також запишемо у полярній системі координат:

$$x^2+y^2=2ax;$$

$$\rho^2=2a\rho\cos\varphi;\rho=2a\cos\varphi;$$

$$y=\sqrt{3}x;$$

$$\rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi,$$

$$tg\varphi=\sqrt{3};\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Отже: $$D:0\le\varphi\le\frac{\pi}{3};0\le\rho\le 2a\cos\varphi\ .$$

Тоді, $$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^{\pi/3}d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho\sin\varphi\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi/3}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho^2 d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/3}\sin\varphi\left[\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2a\cos\varphi}\right]d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3}\sin\varphi\frac{8a^3\cos^3\varphi}{3}d\varphi=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/3}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=-\frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/3}\cos^3\varphi d(\cos\varphi)=-\frac{8a^3}{3}\cdot\left.\frac{\cos^4\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{2a^3}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)=\frac{5a^3}{3}$$

**ПРИКЛАД 3.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+8\right)dxdy$, застосувавши полярні координати, де область інтегрування $D$ задана нерівностями $x\le 0$, $y\ge 0$, $1\le x^2+y^2\le 4$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис. 33):
$x=0$ – вісь $Oy$, $y=0$ – вісь $Ox$, $x^2+y^2=1$ – коло з центром у початку координат і радіусом $R=1$, $x^2+y^2=4$ – коло з

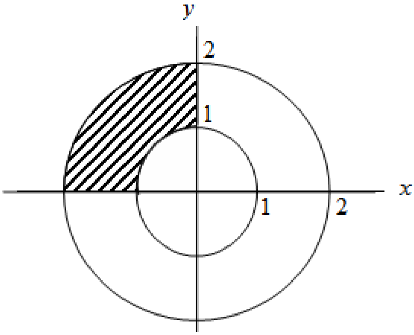


Рисунок 33

центром у початку координат і радіусом $R=2$.

Перейдемо до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,$$

$$x^2+y^2=\rho^2,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi.$$

Тоді $D: \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi, 1\le\rho\le 2$.

Отже:

$$\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+8\right)dxdy=\iint\limits_{D'}\left(\sqrt{\rho^2}+8\right)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_1^2\left(\sqrt{\rho^2}+8\right)\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_1^2(\rho+8)\rho d\rho=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_1^2\left(\rho^2+8\rho\right)d\rho=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}+8\cdot\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}+4\rho^2\right)\Bigg|_1^2 d\varphi=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{2^3}{3}+4\cdot 2^2-\left(\frac{1^3}{3}+4\cdot 1^2\right)\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{8}{3}+16-\left(\frac{1}{3}+4\right)\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{7}{3}+12\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{7+36}{3}d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{43}{3}d\varphi=\frac{43}{3}\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi=\frac{43}{3}\cdot\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{43}{3}\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{43}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{43\pi}{6}$$

## 2.4 Застосування подвійного інтеграла

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Площа плоскої області* $D$: в декартовій системі координат | $S=\iint\limits_D dxdy$ |

| | | |
|---|---|---|
| | в полярній системі координат | $S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$ |

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $xy=2,\ x+y=3$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис. 34): $xy=2,\ y=\dfrac{2}{x}$ – гіпербола, $x+y=3,\ y=3-x$ – пряма.

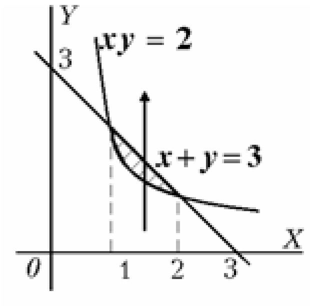



Рисунок 34

Знайдемо точки перетину прямої і гіперболи: $\begin{cases} y=\dfrac{2}{x}; \\ y=3-x, \end{cases}$ $\begin{cases} 3-x=\dfrac{2}{x}; \\ y=3-x, \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x}=0; \\ y=3-x, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1; \\ x_2=2, \end{array}\right. \\ y=3-x, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=1; \\ y_1=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=2; \\ y_2=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розглянемо область інтегрування у напрямку осі $Oy$, тоді її границі інтегрування $1\le x\le 2$, $\dfrac{2}{x}\le y\le 3-x$.

Отже, $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2/x}^{3-x}dy=\int\limits_1^2 dx\left(y\Big|_{2/x}^{3-x}\right)=\int\limits_1^2\left(3-x-\dfrac{2}{x}\right)dx=$

$$=\left(3x-\frac{x^2}{2}-2\ln x\right)\Bigg|_1^2=3(2-1)-\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)-2(\ln 2-\ln 1)=$$

$$=\frac{3}{2}-2\ln 2\approx 0{,}1\text{ ( кв. од.)}$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $xy=1,\ y=2e^x,\ y=4,\ y=6$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис. 35):

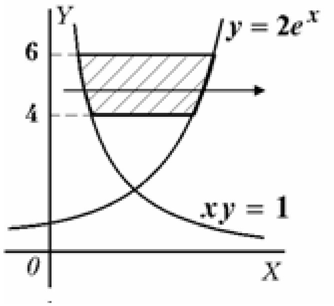



Рисунок 35

$xy = 1$: $y = \dfrac{1}{x}$ – гіпербола, $y = 4$, $y = 6$ – прямі, паралельні осі $Ox$, $y = 2e^x$ – експонента.

Розглянемо область інтегрування у напрямку осі $Ox$, виразимо $x$ через $y$ в рівняннях гіперболи і експоненти, тоді границі інтегрування

$$4 \le y \le 6, \ \frac{1}{y} \le x \le \ln\frac{y}{2}.$$

Отже, $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_4^6 dy \int\limits_{1/y}^{\ln(y/2)} dx = \int\limits_4^6 dy \left( x\Big|_{1/y}^{\ln(y/2)} \right) = \int\limits_4^6 \left( \ln\frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right) dy =$

$$= \int\limits_4^6 \ln\frac{y}{2} dy - \int\limits_4^6 \frac{dy}{y} = \int\limits_4^6 \ln\frac{y}{2} dy - \ln y\Big|_4^6 =$$

до першого інтегралу застосуємо інтегрування частинами:

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln\dfrac{y}{2}; \ du = \dfrac{2}{y}\cdot\dfrac{dy}{2}; \\ dv = dy; \ v = y \end{array} \right|,$$

тоді

$$= y\cdot\ln\frac{y}{2}\Big|_4^6 - \int\limits_4^6 y\cdot\frac{dy}{y} - \ln y\Big|_4^6 = 6\cdot\ln 3 - 3\cdot\ln 2 - y\Big|_4^6 - \ln 6 + \ln 4 =$$

$$= \ln\frac{3^6}{2^3} - 6 + 4 + \ln\frac{4}{6} \approx 1{,}4 \text{ (кв. од.)}$$

**ПРИКЛАД 3.** Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2 = -x + 4$, $y^2 = 2x - 5$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис. 36): $y^2 = -x + 4$ – парабола симетрична осі $Ox$, вершина $(4;0)$, гілки напрямлені ліворуч; $y^2 = 2x - 5$ – парабола, симетрична

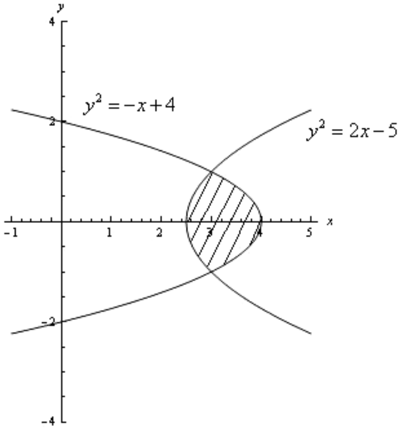



Рисунок 36

осі $Ox$, вершина $(2,5;0)$, гілки напрямлені праворуч. Розглянемо область інтегрування у напрямку осі $Ox$, виразимо $x$ через $y$ в рівняннях парабол:

$$y^2=-x+4:\ x=-y^2+4;$$

$$y^2=2x-5:\ 2x=y^2+5,$$

$$x=\frac{y^2+5}{2}.$$

Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y^2=-x+4; \\ y^2=2x-5, \end{cases} \begin{cases} y^2=-x+4; \\ -x+4=2x-5, \end{cases} \begin{cases} y^2=-x+4; \\ 3x=9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=-3+4=1; \\ x=3, \end{cases} \begin{cases} y=\pm1; \\ x=3. \end{cases}$$

Таким чином, $D: -1\le y\le 1,\ \dfrac{y^2+5}{2}\le x\le -y^2+4$.

Отже, $$S=\iint\limits_{(D)} dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{\frac{y^2+5}{2}}^{-y^2+4}dx=\int_{-1}^{1}\left(x\Big|_{\frac{y^2+5}{2}}^{-y^2+4}\right)dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-y^2+4-\frac{y^2+5}{2}\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\frac{-2y^2+8-y^2-5}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(-3y^2+3\right)dy=\frac{1}{2}\left(-3\frac{y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(-y^3+3y\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-1^3+3\cdot1-\left(-(-1)^3+3\cdot(-1)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-1+3-(1-3)\right)=\frac{1}{2}\left(2-(-2)\right)=\frac{4}{2}=2 \text{ (кв.од.)}$$

**ПРИКЛАД 4.** Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 4\cos\varphi$.

*Розв'язання.* Зобразимо область інтегрування (рис.37): $\rho = 2\cos\varphi$ – коло, центр $(1;0)$, радіус $R=1$; $\rho = 4\cos\varphi$ – коло, центр $(2;0)$, радіус $R=2$. Так як фігура симетрична осі $Ox$, обчислимо площу тієї половини, яка розташована в першій чверті, а потім результат помножимо на два:

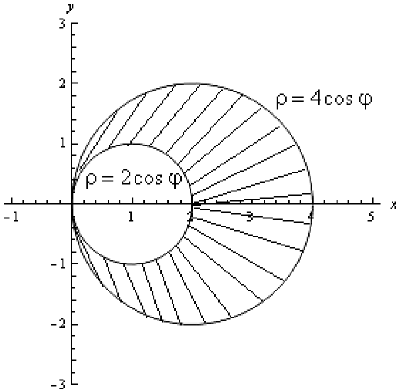



Рисунок 37

$$S = 2\iint\limits_{(D)} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \left( \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left( (4\cos\varphi)^2 - (2\cos\varphi)^2 \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left( 16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} 12\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 12\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 6\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = 6\left( \left. \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= 6\left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\left( 2\cdot\frac{\pi}{2} \right) \right) = 3(\pi + \sin\pi) = 3\pi \text{ (кв. од.)}$$

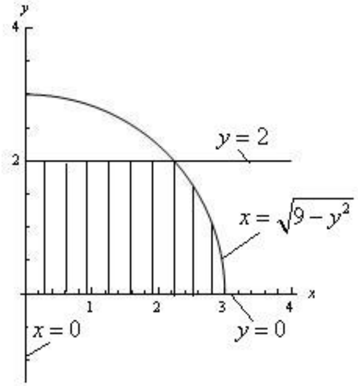
| | | |
|---|---|---|
| 2 | *Об'єм циліндричного тіла* | $V = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$ |

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = x$, $x = \sqrt{9-y^2}$, $y = 2$, $y = 0$, $z = 0$.

*Розв'язання.* Задане тіло обмежене площинами $z = x$, $y = 2$,

$y=0$, $z=0$ і круговим циліндром $x=\sqrt{9-y^2}$.

Зобразимо тіло і його проекцію на площину $xOy$ (рис. 38):



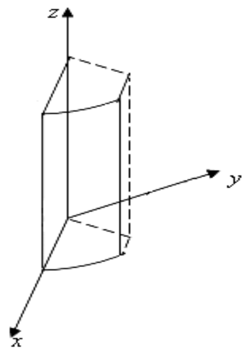




Рисунок 38

Застосуємо формулу $V=\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dxdy$.

Розглянемо область інтегрування $D$ як правильну у напрямку осі $Ox$, тоді $D: 0\le y\le 2, 0\le x\le \sqrt{9-y^2}$.

Отже, $V=\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} xdx=\int\limits_0^2\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{9-y^2}}\right)dy=$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(\left(\sqrt{9-y^2}\right)^2-0^2\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(9-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\left.\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}-0\right)=\frac{1}{2}\left(18-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{54-8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{46}{3}=\frac{23}{3} \text{ (куб. од.)}$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=4-y^2$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$.

*Розв'язання.* Задане тіло обмежене площинами $y=x$, $y=2x$, $z=0$ і параболічним циліндром $z=4-y^2$.

Зобразимо тіло і його проекцію на площину $xOy$ (рис. 39):

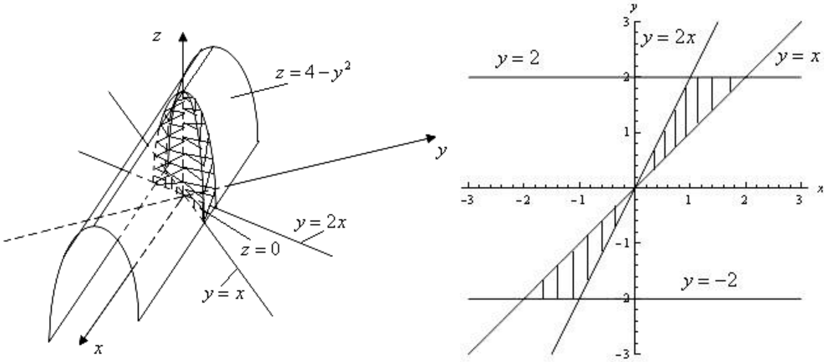



Рисунок 39

Застосуємо формулу $V = \iint\limits_{(D)} f\left(x; y\right) dxdy$.

Так як область інтегрування $D$ є симетричною, то обчислимо об'єм тієї частини, яка розташована в першій чверті і результат помножимо на два. Розглянемо область інтегрування $D$ як правильну у напрямку осі $Ox$, тоді

$$D: 0 \le y \le 2, y/2 \le x \le y.$$

Отже, $V = 2\iint\limits_{(D)} f\left(x, y\right) dxdy = 2\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} (4 - y^2) dx =$

$$= 2\int\limits_0^2 (4 - y^2)\left(x\Big|_{y/2}^{y}\right) dy = 2\int\limits_0^2 (4 - y^2)\left(y - \frac{y}{2}\right) dy =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(4y - y^3 - 2y + \frac{y^3}{2}\right) dy = 2\int\limits_0^2 \left(2y - \frac{y^3}{2}\right) dy =$$

$$= 2\left(2\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(2^2 - \frac{2^4}{8}\right) = 2\left(4 - 2\right) = 4 \text{ (куб. од.)}$$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | *Маса плоскої пластини* | $m = \iint\limits_{D} \mu(x; y) dxdy$, де $\mu(x; y)$ - поверхнева щільність плоскої пластини |

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити масу плоскої пластини, обмеженої областю $D: x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0$, якщо її поверхнева щільність $\mu(x,y)=x^3$.

*Розв'язання.* Побудуємо область $D$ (рис. 40). Застосуємо формулу $m=\iint\limits_{(D)} \mu(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(D)} x^3 dxdy$. Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Тоді

$$D: 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2.$$

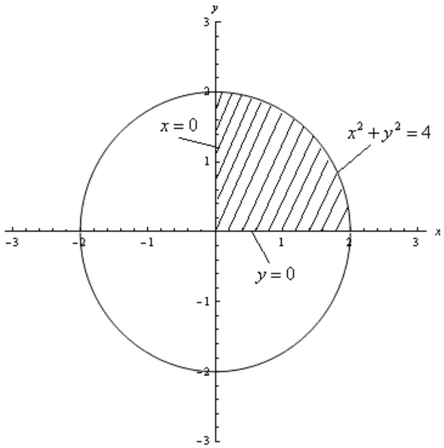



Рисунок 40

Таким чином,

$$m=\iint\limits_{(D)} x^3 dxdy =$$

$$=\iint\limits_{(D')} (\rho\cos\varphi)^3 \rho d\rho d\varphi =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 \cos^3\varphi \cdot \rho d\rho =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \left( \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^2 \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \left( \frac{2^5}{5} - 0 \right) d\varphi =$$

$$=\frac{32}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{32}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi \frac{32}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\varphi\right)\cdot\cos\varphi d\varphi =$$

$$=\left| \begin{matrix} t=\sin\varphi,\ dt=\cos\varphi d\varphi \\ t_1=\sin 0=0,\ t_2=\sin\frac{\pi}{2}=1 \end{matrix} \right| = \frac{32}{5}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right) dt = \frac{32}{5}\int\limits_0^1 dt - \frac{32}{5}\int\limits_0^1 t^2 dt =$$

$$=\frac{32}{5}\int\limits_0^1 dt - \frac{32}{5}\int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{32}{5} t\Big|_0^1 - \frac{32}{5}\cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{32}{5} - \frac{32}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{64}{15} \text{ (од. маси)}$$

| | | |
|---|---|---|
| 4 | *Статичні моменти плоскої пластини:*<br>відносно осі $Ox$<br><br>відносно осі $Oy$ | $M_x = \iint\limits_D y \cdot \mu(x;y)dxdy$,<br>$M_y = \iint\limits_D x \cdot \mu(x;y)dxdy$ |

**ПРИКЛАД.** Обчислити статичний моменти плоскої пластини, обмеженої областю $D$: $x^2 + y^2 \geq y$, $x^2 + y^2 \geq 2y$, $y \geq x$, $y \geq -x/\sqrt{3}$, відносно осі $Ox$, якщо її поверхнева щільність $\mu(x,y) = 2 - y$.

*Розв'язання.* Побудуємо область $D$ (рис. 41), яка обмежена двома колами і двома прямими.

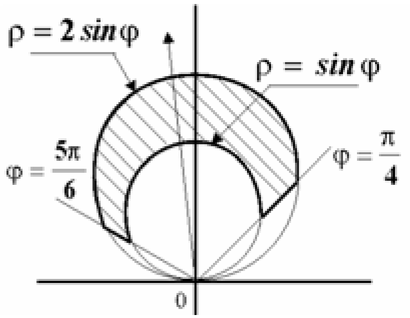



Рисунок 41

Виділимо повні квадрати, щоб привести рівняння кіл до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 = y,$$

$$x^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{центр} - \left(0;\frac{1}{2}\right),\ R = \frac{1}{2};$$

$$x^2 + y^2 = 2y,\ \ x^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = 0,\ \ x^2 + \left(y-1\right)^2 = 1,$$

$$\text{центр} - \left(0;1\right),\ R = 1.$$

Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, поверхнева щільність $\mu(x,y) = 2 - y = 2 - \rho\sin\varphi$; границі області інтегрування:

$$x^2 + y^2 = y,\ \rho^2 = \rho\sin\varphi,\ \rho_1 = \sin\varphi;$$

$$x^2 + y^2 = 2y,\ \rho^2 = 2\rho\sin\varphi,\ \rho_2 = 2\sin\varphi;$$

$$y = x, tg\varphi = 1,\ \varphi_1 = \pi/4;$$

$$y = -x/\sqrt{3}, tg\varphi = -1/\sqrt{3}, \varphi_2 = 5\pi/6\,.$$

Знайдемо статичний момент відносно осі $Ox$, застосуємо формулу:

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \mu(x;y)dxdy = \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} \rho\sin\varphi \cdot (2 - \rho\sin\varphi)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \sin\varphi d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} (2\rho^2 - \rho^3\sin\varphi)d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \sin\varphi \left( \frac{2\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\sin\varphi \right)\Bigg|_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \sin\varphi \Big( 2/3\big(8\sin^3\varphi - \sin^3\varphi\big) - \sin\varphi/4\big(4\sin^4\varphi - \sin^4\varphi\big)\Big) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \sin\varphi \left( \frac{2}{3}\big(8\sin^3\varphi - \sin^3\varphi\big) - \frac{\sin\varphi}{4}\big(4\sin^4\varphi - \sin^4\varphi\big) \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \left( \frac{14}{3}\sin^4\varphi - \frac{3\sin^6\varphi}{4} \right) d\varphi = \frac{14}{3}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \left( \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \right)^2 d\varphi -$$

$$- \frac{3}{4}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \left( \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \right)^3 d\varphi = \frac{7}{6}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \big(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\big) d\varphi -$$

$$- \frac{3}{32}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \big(1 - 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi - \cos^3 2\varphi\big) d\varphi =$$

$$= \frac{7}{6}\left( \varphi - \frac{2}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6} + \frac{7}{6}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\big(1 + \cos 4\varphi\big) d\varphi -$$

$$- \frac{3}{32}\left( \varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6} - \frac{9}{32}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\big(1 + \cos 4\varphi\big) d\varphi +$$

$$+ \frac{3}{32}\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} \big(1 - \sin^2 2\varphi\big)\cos 2\varphi d\varphi =$$

<table>
<tr><td colspan="3">

$$=\frac{7}{6}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}-\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{2}\right)+\frac{7}{12}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6}-$$

$$-\frac{3}{32}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\sin\frac{5\pi}{3}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\frac{9}{64}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6}+$$

$$+\frac{3}{64}\left(\sin 2\varphi-\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6}=\frac{7}{6}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+$$

$$+\frac{7}{12}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{10\pi}{3}-0\right)\right)-\frac{3}{32}\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{3}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-1\right)\right)-$$

$$-\frac{9}{64}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{10\pi}{3}-0\right)\right)+\frac{3}{64}\left(\sin\frac{5\pi}{3}-1-\frac{1}{3}\left(\sin^3\frac{5\pi}{3}-1\right)\right)\approx$$

$$\approx 4{,}55$$

</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Момент інерції пластини відносно осей координат:<br>відносно осі $Ox$<br><br>відносно осі $Oy$</td><td>

$$I_x=\iint_D y^2\cdot\mu(x;y)dxdy$$

$$I_y=\iint_D x^2\cdot\mu(x;y)dxdy$$

</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Момент інерції пластини відносно початку координат:</td><td>

$$I_0=I_x+I_y=$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)\cdot\mu(x;y)dxdy$$

</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Координати центра мас (тяжіння) $C\left(x_c;y_c\right)$ плоскої пластини:</td><td>

$$x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\cdot\mu(x;y)ds}{\iint_D \mu(x;y)ds}$$

$$y_c=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\cdot\mu(x;y)ds}{\iint_D \mu(x;y)ds}$$

</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | *Координати центра тяжіння однорідної плоскої пластини* *(* $\mu(x;y)=\text{const}$ *)* | $x_c=\dfrac{\iint\limits_D x ds}{\iint\limits_D ds}=\dfrac{\iint\limits_D x ds}{S}$, $y_c=\dfrac{\iint_D y ds}{\iint_D ds}=\dfrac{\iint_D y ds}{S}$ |

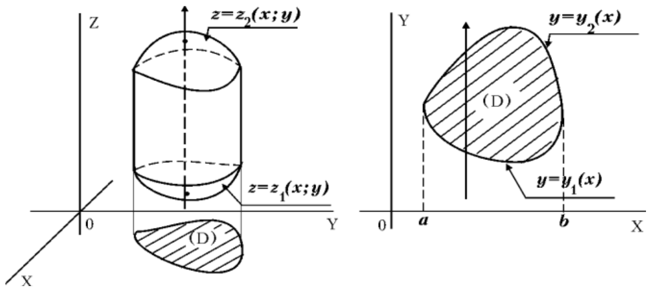
## 2.5 Потрійний інтеграл: поняття і властивості

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| Потрійний інтеграл є логічним продовженням поняття інтегралу на випадок функції трьох незалежних змінних за просторовою областю. Нехай у замкненій області $(V)$ трьохвимірного простору у прямокутній системі координат $Oxyz$ задано функцію $u=u(x,y,z)$. Розіб’ємо область $(V)$ довільною сіткою поверхонь на елементарні частини (елементарні об’єми) $\Delta v_i$ $(i=1,2,...,n)$, обчислимо значення функції в довільній точці кожної елементарної області і складемо інтегральну суму | | |
| 1 | *Інтегральною сумою* функції $u=u(x,y,z)$ за областю $(V)$ називається сума добутків значень функції в обраних точках функції на об’єми відповідних часткових (елементарних) областей $\Delta v_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i$ |
| 2 | *Потрійним інтегралом* від функції $u=u(x,y,z)$ за об- | $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv=$ |

| | | |
|---|---|---|
| | ластю $(V)$ називається границя отриманої інтегральної суми при необмеженому збільшенні числа розбиттів області на частини і при прямуванні об'ємів цих частин до нуля | $= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$, область $(V)$ називається *областю інтегрування* для підінтегральної функції $u = u(x, y, z)$ |
| 3 | *Теорема існування потрійного інтеграла:* Якщо функція $f(x, y, z)$ є неперервною або кусково-неперервною в області $(V)$, то потрійний інтеграл завжди існує і дорівнює визначеному числу | |
| 4 | *Геометричний зміст* потрійного інтеграла:<br>1) якщо функція $f(x, y, z) \equiv 1$ в усіх точках області $(V)$, то потрійний інтеграл є об'ємом тіла, яке розташоване в області інтегрування;<br>2) якщо підінтегральна функція відмінна від одиниці в області інтегрування, то інтеграл геометричного змісту не має | $V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$ |
| 5 | *Фізичний зміст* потрійного інтеграла: маса тіла, яке займає область $(V)$ і має змінну щільність $\mu(x, y, z)$, дорівнює потрійному інтегралу від щільності за областю $(V)$ | $m = \iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dv$ |

| | |
|---|---|
| 6 | *Властивості потрійного інтеграла:*<br>1) *почленне інтегрування:* потрійний інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків;<br>2) *винесення постійного множника:* постійний множник можна виносити за знак потрійного інтеграла;<br>3) *розбиття області інтегрування на частини:* якщо область інтегрування можна розбити на частини, то потрійний інтеграл можна представити у вигляді суми інтегралів за окремими частинами області;<br>4) *оцінка потрійного інтеграла:* якщо $M$ і $m$ – відповідно найбільше і найменше значення функції $f(x;y;z)$ в області $(V)$, то величина потрійного інтеграла не менша за $m \cdot V$ і не більша за $M \cdot V$, де $V$ – об'єм області $(V)$;<br>5) *теорема про середнє для подвійного інтеграла:* якщо функція $f(x;y;z)$ неперервна в області $(V)$, то справедлива рівність:<br>$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv = f(C) \cdot V,$$<br>де $V$ – об'єм області інтегрування, а $f(C)$ – значення підінтегральної функції у деякій точці $C$ цієї області. У фізичному змісті теорема про середнє для потрійного інтегралу означає, що маса тіла, яке має змінну об'ємну щільність, дорівнює добутку об'єма тіла на величину щільності в деякій точці $C$ цієї області (значення $\mu(C) = \mu_{ср.}$ – середня щільність тіла).<br>*Визначення.* Середнім значенням функції $f(x;y;z)$ в області $(V)$ називається величина<br>$$f(C) = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv$$ |

## 2.6 Потрійний інтеграл у прямокутних координатах

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Алгоритм обчислення потрійного інтегралу в прямокутній системі координат* від функції $u(x;y;z)$ за просторовою областю $(V)$ (рис. 42):<br>1) побудувати в системі координат $Oxyz$ область інтегрування $(V)$;<br><br><br>Рисунок 42<br>2) елемент об'єму $dv$ замінити на добуток $dxdydz$; обрати порядок інтегрування в залежності від вигляду області інтегрування $(V)$. Спроектувати область $(V)$ на одну з координатних площин, в результаті отримати її проекцію – плоску область $D$, і рівняння поверхонь, які обмежують просторову область $(V)$;<br>3) визначити за допомогою рисунка плоскої області $D$ границі інтегрування, як у подвійному інтегралі;<br>4) якщо поверхня $(V)$ правильна у напрямку осі $Oz$, а плоска область $D$ правильна у напрямку осі $Oy$, то послідовність інтегрування буде такою:<br>внутрішнє за змінною $z$: $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$,<br>проміжне за змінною $y$: $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, | |

| | |
|---|---|
| | а зовнішнє за змінною $x$: $a \le x \le b$.<br>Потрійний інтеграл у вигляді повторного запишеться так:<br>$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz;$$<br>5) спочатку треба обчислити внутрішній інтеграл за змінною $z$ (при цьому змінні $x$ і $y$ вважаються постійними), потім обчислити подвійний інтеграл.<br>Зауваження. Розглянуто один із способів переходу від потрійного інтегралу до трьохкратного. Не обов'язково внутрішній інтеграл в потрійному треба розглядати за змінною $z$, він може бути також за змінними $x$ або $y$. Аналогічно з проміжним і зовнішнім інтегруванням. Таким чином, існує шість способів переходу від потрійного інтегралу до трьохкратного |

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити потрійний інтеграл $2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2+2}^{4-y^2} dz$.

*Розв'язання.* $2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2+2}^{4-y^2} dz = 2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} \left( z\Big|_{y^2+2}^{4-y^2} \right) dy =$

$$= 2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} \left(4 - y^2 - \left(y^2 + 2\right)\right) dy = 2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} \left(4 - y^2 - y^2 - 2\right) dy =$$

$$= 2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} \left(2 - 2y^2\right) dy = 4\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} \left(1 - y^2\right) dy =$$

$$= 4\int\limits_{-1}^{2} \left( y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 dx = 4\int\limits_{-1}^{2} \left( 1 - \frac{1^3}{3} - \left( 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right) dx = 4 \cdot \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{2} dx =$$

$$= \frac{8}{3} \int\limits_{-1}^{2} dx = \frac{8}{3} \cdot x\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} \cdot \left(2 - (-1)\right) = \frac{8}{3} \cdot 3 = 8$$

**ПРИКЛАД 2.** Записати потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ у вигляді повторного і розставити границі інтегрування за областю $(V)$, обмеженою поверхнями $3x+4y=12$, $z=6-x^2-y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

*Розв'язання.* Зобразимо задані поверхні (рис. 43):

$z=6-x^2-y^2$ – еліптичний параболоїд, головна вісь – вісь $Oz$, вершина $(0;0;6)$, площина $3x+4y=12$, координатні площини $x=0$, $y=0$, $z=0$.

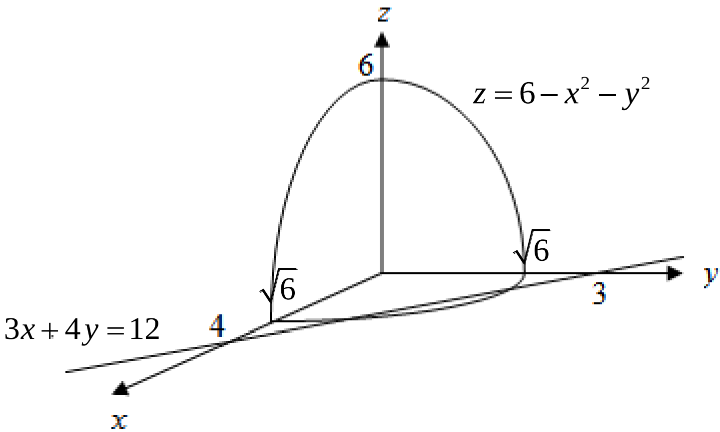



Рисунок 43

Зробимо проекцію тіла на площину $xOy$ (рис. 44): $x^2+y^2=6$ – коло з центром на початку координат і радіусом $R=\sqrt{6}$, $3x+4y=12$ – пряма, $x=0$ – вісь $Oy$, $y=0$ – вісь $Ox$.

Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} 6-x^2-y^2=0; \\ 3x+4y=12, \end{cases} \quad \begin{cases} 6-x^2-y^2=0; \\ y=\dfrac{12-3x}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} 6-x^2-\left(\dfrac{12-3x}{4}\right)^2=0; \\ y=\dfrac{12-3x}{4}, \end{cases}$$

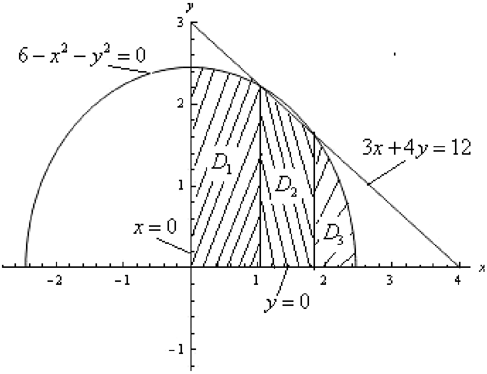



Рисунок 44

$$6-x^2-\left(\frac{12-3x}{4}\right)^2=0,$$

$$6-x^2-\frac{(12-3x)^2}{16}=0,$$

$$\frac{96-16x^2-(12-3x)^2}{16}=0,$$

$$96-16x^2-(12-3x)^2=0,$$

$$96-16x^2-\left(144-72x+9x^2\right)=0,\ 96-16x^2-144+72x-9x^2=0,$$

$$-25x^2+72x-48=0,\ 25x^2-72x+48=0,$$

$$D=5184-4800=384\approx 19,6,$$

$$x_1=\frac{72-19,6}{50}\approx 1,05,\ x_2=\frac{72+19,6}{50}\approx 1,83.$$

Розглянемо отриману область у напрямку осі $Oy$, тоді вона розбивається на три частини:

$$D_1: 0\le x\le 1,05, 0\le y\le\sqrt{6-x^2},$$

$$D_2: 1,05\le x\le 1,83, 0\le y\le\frac{12-3x}{4},$$

$$D_3: 1,83\le x\le\sqrt{6}, 0\le y\le\sqrt{6-x^2},$$

при цьому $0\le z\le 6-x^2-y^2$.

Тоді: $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz=\int\limits_0^{1,05}dx\int\limits_0^{\sqrt{6-x^2}}dy\int\limits_0^{6-x^2-y^2}f(x;y;z)dxdydz+$

$$+\int\limits_{1,05}^{1,83}dx\int\limits_0^{\frac{12-3x}{4}}dy\int\limits_0^{6-x^2-y^2}f(x;y;z)dxdydz+$$

$$+\int\limits_{1,83}^{\sqrt{6}}dx\int\limits_0^{\sqrt{6-x^2}}dy\int\limits_0^{6-x^2-y^2}f(x;y;z)dxdydz$$

**ПРИКЛАД 3.** Розставити границі інтегрування у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ за областю $(V)$, обмеженою поверхнями: $x=0,\ y=1,\ y=2x,\ x+y+z=3,\ x\geq 0,\ z\geq 0$.

*Розв'язання.* Будуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 45). Вона обмежена координатними площинами $yOz$ і $xOy$; площиною $y=1$, яка паралельна площині $xOz$, площиною $y=2x$, яка проходить через вісь $xOz$; і площиною $x+y+z=3$, яка відтинає на координатних осях рівні відрізки, які дорівнюють трьом.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $xOy$ (рис. 45). Отримана плоска область $D$ обмежена прямими $x=0$, $y=1$, $y=2x$, $x+y=3$. Останнє рівняння отримане як перетин площин $x+y+z=3$ і $z=0$.

Розглянемо просторову область $(V)$ у напрямі осі $Oz$. Тоді $z_1=0$ – поверхня входу, $z_2=3-x-y$ – поверхня виходу. Плоску область $D$ розглянемо у напрямі осі $Ox$;

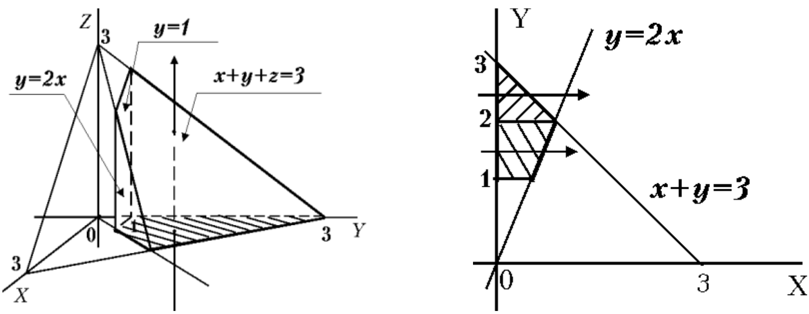



Рисунок 45

знайдемо координати точки перетину прямих $y=2x,\ x+y=3$, це буде точка $(1;2)$. Тоді область $D$ розбивається прямою $y=2$ на дві частини: $D_1: 0\leq x\leq y/2$ і

$D_2: 0 \le x \le 3-y$.

Отже, потрійний інтеграл буде дорівнювати сумі двох трьохкратних інтегралів:

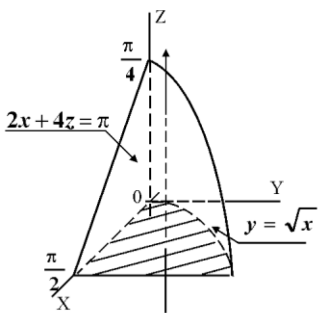
$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz = \int_1^2 dy \int_0^{y/2} dx \int_0^{3-x-y} f(x;y;z)dxdydz +$$

$$+\int_2^3 dy \int_0^{3-y} dx \int_0^{3-x-y} f(x;y;z)dxdydz$$

**ПРИКЛАД 4.** Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+2z)dxdydz$ за областю $(V)$, обмеженою поверхнями: $y \le \sqrt{x}$, $2x+4z \le \pi$, $z \ge 0$.

*Розв'язання.* Будуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 46). Вона обмежена координатними площинами $xOz$ і $xOy$, площиною $2x+4z=\pi$ і параболічним циліндром $y=\sqrt{x}$.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $xOy$ (рис. 46). Отримана плоска область $D$ обмежена прямими $x=\pi/2$, $y=0$ і параболою $y=\sqrt{x}$.



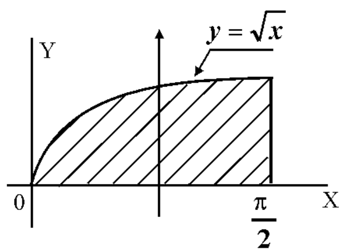




Рисунок 46

Розглянемо просторову область $(V)$ у напрямі осі $Oz$. Тоді $z_1=0$ – поверхня входу, $z_2=(\pi-2x)/4$ – поверхня виходу

| |
|---|
| Плоску область $D$ розглянемо у напрямі осі $Oy$: $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \sqrt{x}$. <br> Отже, потрійний інтеграл буде дорівнювати такому трьохкратному інтегралу: <br> $$\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+2z)dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} ydy \int\limits_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x+2z)dz =$$ <br> $$= \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} y\left(\sin(x+2z)\Big\|_0^{(\pi-2x)/4}\right)dy =$$ <br> $$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin x)dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} ydy =$$ <br> $$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin x)\left(\frac{y^2}{2}\Big\|_0^{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin x)xdx =$$ <br> $$= \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{\pi/2} xdx - \int\limits_0^{\pi/2} x\sin xdx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)$$ |

## 2.7 Заміна змінних у потрійному інтегралі

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Коли обчислення потрійного інтегралу у декартовій системі координат є важким, має сенс перейти до нових координат, які спрощують роботу з цим інтегралом. <br> Нехай нові змінні $u$, $v$, $w$ пов'язані з декартовими координатами $x, y, z$ співвідношеннями $\begin{cases} x = x(u,v,w); \\ y = y(u,v,w); \\ z = z(u,v,w), \end{cases}$ де | |

| | | |
|---|---|---|
| | $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ і $z(u,v,w)$ мають неперервні частинні похідні в області $(V^*)$ змінних $u,v,w$ | |
| 2 | Формула *заміни змінних у потрійному інтегралі* | $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz =$ $= \iiint\limits_{(V^*)} F(u;v;w)\left\|J\right\|dudvdw,$ де $J$ - якобіан переходу $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ |
| 3 | *Алгоритм переходу у потрійному інтегралі від декартових координат до нових криволінійних $u,v,w$:* 1) в підінтегральній функції $f(x;y;z)$ перейти до змінних $u,v,w$ за допомогою формули переходу; 2) обчислити якобіан переходу $J$; 3) границі області інтегрування записати у нових змінних $u,v,w$; 4) знайти межі інтегрування для нових змінних; 5) записати вихідний інтеграл у нових координатах, перейти до трьохкратного і обчислити його | |

## 2.8 Потрійний інтеграл у циліндричних координатах

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Циліндрична система є узагальненням полярної системи координат на просторовий випадок | |
| 2 | *Формули переходу від декартових координат до циліндричних у потрійному інтегралі,* де $(\rho;\varphi)$ – по- | $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z, \end{cases}$ |

<table>
<tr>
<td></td>
<td>лярні координати проекції точки $M$ на площину $xOy$, $z$ – апліката точки $M$ (рис. 47)</td>
<td>

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ tg\varphi = y/x; \\ z = z, \end{cases}$$

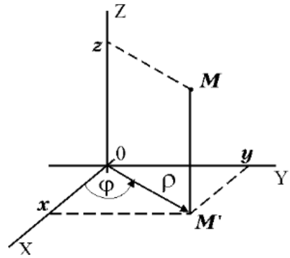



Рисунок 47
</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td colspan="2">

*Алгоритм переходу у потрійному інтегралі від декартових координат до циліндричних:*

1) в підінтегральній функції $f(x;y;z)$ перейти до циліндричних координат за формулами

$$f(x;y;z) = f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z);$$

2) обчислити якобіан переходу $J$:

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

отже, елемент об'єму в циліндричній системі координат дорівнює $dv = \rho d\rho d\varphi dz$;

3) записати у циліндричних координатах рівняння поверхонь $z = z(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)$ і рівняння ліній $\rho = \rho(\varphi)$;

4) знайти межі інтегрування для нових змінних $\rho$ і $\varphi$;

5) записати потрійний інтеграл у вигляді трьохкратного і обчислити його: $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz =$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz$$
</td>
</tr>
</table>

*Зауваження 1.* В деяких випадках, коли область $(V)$ зручніше спроектувати на площину $xOz$ або $yOz$, треба застосувати наступні формули:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=y; \\ z=\rho\sin\varphi \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=x; \\ y=\rho\cos\varphi; \\ z=\rho\sin\varphi \end{cases} \text{ відповідно.}$$

*Зауваження 2*. Ефективно застосовувати циліндричні координати у тих випадках, коли область $(V)$ обмежена параболоїдами, циліндрами, конусами та їх поєднаннями з іншими поверхнями.

*Зауваження 3*. Приклади перетворення рівнянь поверхонь при переході від декартових координат до циліндричних дивитись у додатку Л

**ПРИКЛАД 1.** Перейти у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ до циліндричних координат, де область $(V)$ обмежена поверхнями: $x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0$.

*Розв'язання.* Побудуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 48). Вона обмежена знизу координатною площиною $xOy$, зверху – сферичною поверхнею $x^2+y^2+z^2=4$, а збоку – циліндрричною поверхнею $x^2+y^2=1$. Розглянемо отримане тіло у напрямку осі $Oz$, тоді $z=0$ – поверхня входу, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ – поверхня виходу.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $xOy$ (рис. 48). Отримана плоска область $D$ є колом $x^2+y^2=1$.

Перейдемо до циліндричних координат за допомогою формул: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \\ z=z, \end{cases}$ тоді $0\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$, $0\le\rho\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$ –

границі інтегрування, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ – елемент об'єму.

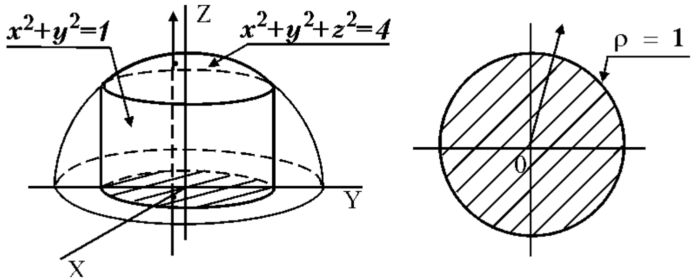



Рисунок 48

Отже, потрійний інтеграл в циліндричних координатах матиме вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz$$

**ПРИКЛАД 2.** Перейти у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ до циліндричних координат, де область $(V)$ обмежена поверхнями: $x^2+z^2=1-y,\ y=0,\ x\ge 0,\ z\ge 0$.

*Розв'язання.* Побудуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 49). Вона обмежена координатними площинами $xOy$, $xOz$, $yOz$ і параболоїдом $x^2+y^2=1-y$. Розглянемо отримане тіло у напрямі осі $Oy$, тоді $y=0$ – поверхня входу, $y=1-x^2-y^2$ – поверхня виходу.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $xOz$ (рис. 49). Отримана плоска область $D$ є чвертю кола: $x^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ z\ge 0$.

Перейдемо до циліндричних координат за допомогою формул: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=y; \\ z=\rho\sin\varphi, \end{cases}$ тоді $0\le y\le\sqrt{1-\rho^2}$, $0\le\rho\le 1$, $0\le\varphi\le\pi/2$ –

границі інтегрування, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dy$ – елемент об’єму.

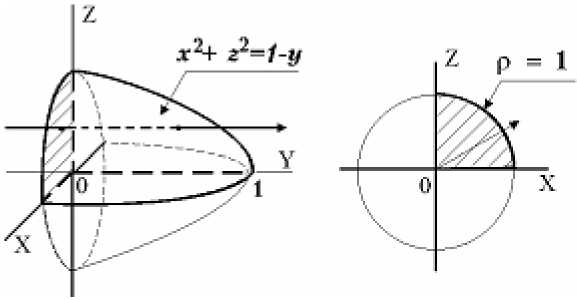



Рисунок 49

Отже, потрійний інтеграл в циліндричних координатах матиме вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ y,\ \rho\sin\varphi)dy$$

**ПРИКЛАД 3.** Перейти у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ до циліндричних координат, де область $(V)$ обмежена поверхнями: $y^2+z^2=x,\ x=2.$

*Розв’язання.* Побудуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 50). Вона обмежена площиною $x=2$ і параболоїдом $z^2+y^2=x$. Розглянемо отримане тіло у напрямі осі $Ox$, тоді $x=y^2+z^2$ – поверхня входу, $x=2$ – поверхня виходу.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $yOz$ (рис. 50). Отримана плоска область $D$ є коло $y^2+z^2\le 2$, $x=2$.

Перейдемо до циліндричних координат за допомогою формул: $\begin{cases} x=x; \\ y=\rho\cos\varphi; \\ z=\rho\sin\varphi, \end{cases}$ тоді $\rho^2\le x\le 2$, $0\le\rho\le\sqrt{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$ – границі інтегрування, $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dx$ – елемент об’єму

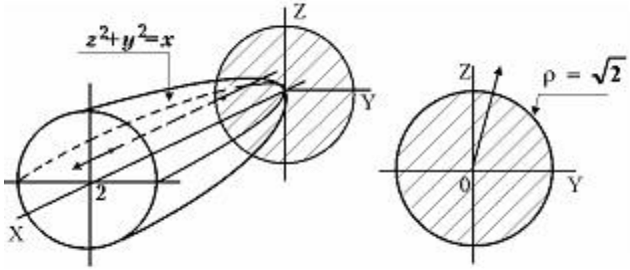



Рисунок 50

Отже, потрійний інтеграл в циліндричних координатах матиме вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2} f(x,\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)dx$$

**ПРИКЛАД 4.** Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ за областю $(V)$, яка обмежена поверхнями $y^2+x^2=2y$, $y+z=2$, $z\geq 0$.

*Розв'язання.* Побудуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 51). Вона обмежена знизу площиною $z=0$ – поверхня входу, зверху – площиною $z=2-y$ – поверхня виходу, збоку – циліндричною поверхнею $x^2+y^2=2y$.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $xOy$ (рис. 51). Отримана плоска область $D$ є коло $x^2+(y-1)^2\leq 1$.

Перейдемо до циліндричних координат за допомогою формул: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \\ z=z, \end{cases}$ тоді $0\leq z\leq 2-\rho\sin\varphi$, $0\leq\rho\leq 2\sin\varphi$, $0\leq\varphi\leq\pi$ – границі інтегрування, $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$ – елемент об'єму, підінтегральна функція: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\rho}$.

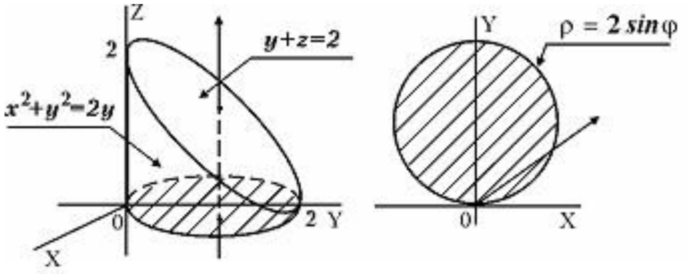



Рисунок 51

Отже, потрійний інтеграл в циліндричних координатах запишемо так:

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho d\rho\int\limits_0^{2-\rho\sin\varphi}\frac{dz}{\rho}=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}d\rho\int\limits_0^{2-\rho\sin\varphi}dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}d\rho\left(z\Big|_0^{2-\rho\sin\varphi}\right)=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}(2-\rho\sin\varphi)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(2\rho-\frac{\rho^2}{2}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\left(4\sin\varphi-2\sin^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(4-2\sin^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi=-\int\limits_0^{\pi}\left(4-2(1-\cos^2\varphi)\right)d(\cos\varphi)=$$

$$=-\int\limits_0^{\pi}\left(2+2\cos^2\varphi)\right)d(\cos\varphi)=-\left(2\cos\varphi+\frac{2}{3}\cos^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\left(-2-2-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

## 2.9 Потрійний інтеграл у сферичних координатах

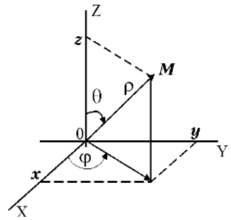
<table>
<tr><th>Ч.ч</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td>1</td><td>У сферичній системі координат положення точки $M$ визначається трьома числами $M(\rho,\varphi,\theta)$, де $\rho=\left|OM\right|$ – сферичний радіус, $\varphi$, $\theta$ – сферичні кути, які змінюються в таких границях: $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le2\pi$ (рис. 52)</td><td>

Рисунок 52</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Формули переходу від декартових координат до сферичних у потрійному інтегралі</td><td>$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Алгоритм переходу у потрійному інтегралі від декартових координат до сферичних:<br>1) в підінтегральній функції $f(x;y;z)$ перейти до сферичних координат за формулами<br>$$f(x;y;z)=f(\rho\cos\varphi\sin\theta;\ \rho\sin\varphi\sin\theta;\ \rho\cos\theta);$$<br>2) обчислити якобіан переходу $J$:<br>$$J=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix}=$$<br>$$=\rho^2\sin\theta,$$<br>отже, елемент об’єму в сферичній системі координат дорівнює $dv=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$;<br>3) записати у сферичних координатах рівняння границь області інтегрування $\rho=\rho_1(\theta,\ \varphi)$, $\rho=\rho_2(\theta,\ \varphi)$;<br>4) знайти межі інтегрування для нових змінних $\rho$, $\theta$ і</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | $\varphi$ (при цьому зручно використовувати «стрілку», яка виходить з початку координат і перетинає область у просторі);<br>5) записати потрійний інтеграл у вигляді трьохкратного і обчислити його:<br>$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} F(\rho;\theta;\varphi)\rho^2 d\rho$$ |

*Зауваження 1.* Ефективно застосовувати сферичні координати в тих випадках, коли область $(V)$ обмежена сферичними і конічними поверхнями.
*Зауваження 2.* Приклади перетворення рівнянь поверхонь при переході від декартових координат до сферичних дивитись у додатку М

**ПРИКЛАД 1.** Перейти у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ до сферичних координат, де область $\left(V\right)$ обмежена поверхнями: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x/\sqrt{3} \le y \le x\sqrt{3}$, $x>0$, $y>0$, $z \ge 0$.

*Розв'язання.* Побудуємо область інтегрування $\left(V\right)$ (рис. 53). Вона обмежена знизу координатною площиною $xOy$, зверху – сферичною поверхнею $x^2+y^2+z^2=R^2$, а збоку – вертикальними площинами $y=x/\sqrt{3}$, $y=x\sqrt{3}$.
Перейдемо до сферичних координат за допомогою формул:
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z=\rho\cos\theta. \end{cases}$$
Перетнемо тіло «стрілкою», яка виходить з початку координат і перетинає сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$, рівняння якої в сферичній системі координат має вигляд $\rho=R$, отже, $0\le\rho\le R$.

Так як кут $\theta$ відраховуємо від додатного напряму осі $Oz$ і все тіло розташоване у верхній півплощині, то межі кута $\theta$ будуть такими: $0 \le \theta \le \pi/2$.

Спроектуємо область $(V)$ на площину $xOy$ (рис. 53). Отримана область є коло радіуса $R$, з якого прямі $y = x/\sqrt{3}$, $y = x\sqrt{3}$ вирізають сектор. В сферичних координатах ці прямі запишуться так: $tg\varphi = 1/\sqrt{3}$, $\varphi = \pi/6$; $tg\varphi = \sqrt{3}$, $\varphi = \pi/3$. Таким чином, кут $\varphi$ змінюється в межах: $\pi/6 \le \varphi \le \pi/3$.

Елемент об'єму $dv = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$.

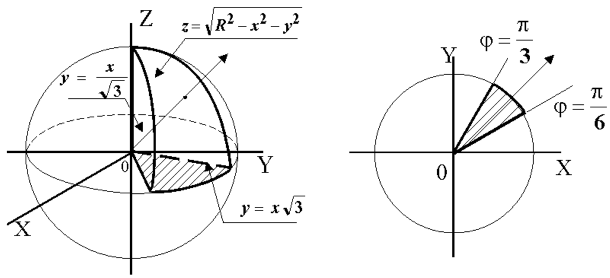



Рисунок 53

Отже, потрійний інтеграл в сферичних координатах матиме вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} F(\rho;\theta;\varphi)\rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_{0}^{R} F(\rho;\theta;\varphi)\rho^2 d\rho$$

**ПРИКЛАД 2.** Перейти у потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz$ до сферичних координат, де область $(V)$ обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le y \le x$, $z > 0$

*Розв'язання.* Побудуємо область інтегрування $(V)$ (рис. 54). Вона обмежена знизу конічною поверхнею $x^2+y^2=z^2$, $z>0$, зверху – сферичною поверхнею $x^2+y^2+z^2=1$, а збоку – вертикальними площинами $y=0$, $y=x$.
Перейдемо до сферичних координат за допомогою формул:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta; \text{ тоді } \theta=\pi/4,\ 0\le\theta\le\pi/4,\ \rho=1,\ 0\le\varphi\le\pi/4. \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases}$$

Елемент об'єму $dv=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$.

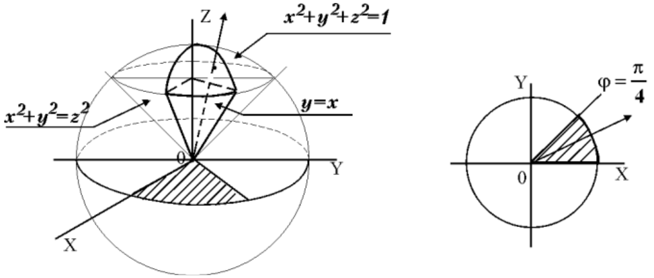



Рисунок 54

Отже, потрійний інтеграл в сферичних координатах матиме вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)dxdydz=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int_0^1 F(\rho;\ \theta,\ \varphi)\rho^2 d\rho$$

## 2.10 Застосування потрійного інтегралу

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Об'єм тіла* | $V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz$ |

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями $(V)$: $2y+z=2,\ y+z=1,\ x^2=y$.

*Розв'язання.* Побудуємо тіло у просторі (рис. 55). Знизу і зверху воно обмежене площинами $2y+z=2$, $y+z=1$, а збоку – параболічним циліндром $y=x^2$. Проекцією тіла на площину $Oxy$ є параболічний сегмент.

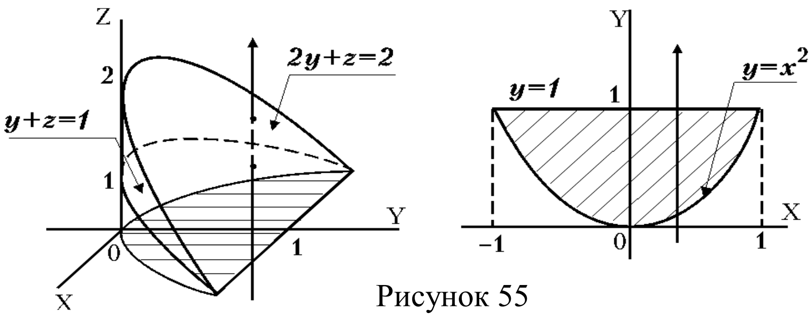



Рисунок 55

За допомогою рисунка 55 визначимо границі інтегрування:

$$(V):\ -1\le x\le 1;\ x^2\le y\le 1;\ 1-y\le z\le 2-2y.$$

Отже, об'єм тіла дорівнює:

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{1-y}^{2-2y}dz=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}\left(z\Big|_{1-y}^{2-2y}\right)dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}\big((2-2y)-(1-y)\big)dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(1-y)\,dy=\int_{-1}^{1}\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2-\frac{1}{2}(1-x^4)\right)dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(1+1)-\frac{1}{3}(1+1)+$$

$$+\frac{1}{5}(1+1)=1-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}\ \text{(куб. од.)}$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями $(V)$: $z=3x^2+3y^2$, $z=6-3x^2-3y^2$.

*Розв'язання.* Побудуємо тіло у просторі (рис. 56). Тіло займає простір між двома параболоїдами і проектується на площину

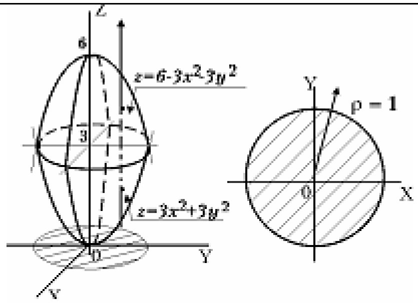



Рисунок 56

$xOy$ у вигляді кола з радіусом $R=1$ (рис. 56). Обчислення зручніше вести в циліндричних координатах. Застосуємо формули:

$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$,

тоді рівняння поверхонь будуть мати вигляд:

$$z=3x^2+3y^2 \Rightarrow z=3\rho^2,$$

$$z=6-3x^2-3y^2 \Rightarrow z=6-3\rho^2.$$

Межі інтегрування: $0\le\rho\le1;\quad 0\le\varphi\le2\pi;\quad 3\rho^2\le z\le 6-3\rho^2;$ елемент об'єму: $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$.

Отже, об'єм тіла дорівнює:

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_{3\rho^2}^{6-3\rho^2}dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\left(z\Big|_{3\rho^2}^{6-3\rho^2}\right)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho(6-3\rho^2-3\rho^2)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(6\rho-6\rho^3\right)d\rho=\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(3\rho^2-\frac{3}{2}\rho^4\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2\pi\left(3-3/2\right)=3\pi \text{ (куб. од.)}$$

**ПРИКЛАД 3.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями $(V)$: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2=y^2+z^2,\ x\ge0$.

*Розв'язання.* Побудуємо тіло у просторі (рис. 57). Тіло займає область, яка обмежена конусом $x^2=y^2+z^2,\ x\ge0$ і сферою $x^2+y^2+z^2=4$. Віссю конуса є вісь $Ox$. Проектуємо тіло на площину $yOz$ (рис. 57).

Перейдемо до сферичних координат, застосуємо формули:

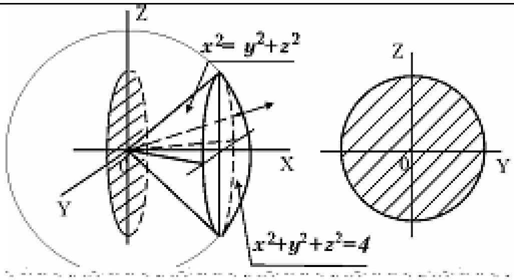



Рисунок 57

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta; \\ y=\rho\cos\varphi\sin\theta; \\ z=\rho\sin\varphi\sin\theta, \end{cases}$$ визначимо межі інтегрування: кут $\theta$ змінюється від додатного напряму осі $Ox$ і до поверхні конуса, тобто, $0\le\theta\le\pi/4$ (так як $x^2=y^2+z^2,\ \rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta,\ tg\theta=1$), сферичний кут $\varphi$, виходячи з проекції тіла – $0\le\varphi\le 2\pi;$ сферичний радіус змінюється від $\rho=0$ до поверхні сфери $\rho=2$ (так як $x^2+y^2+z^2=4\Rightarrow\rho^2=4$).

Елемент об'єму: $dxdydz=\rho^2\sin\theta d\varphi d\rho d\theta$ .

Отже, об'єм тіла в сферичній системі координат дорівнює:

$$V=\iiint\limits_{(V)}dxdydz=\iiint\limits_{(V)}\rho^2\sin\theta d\varphi d\rho d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2}\rho^2 d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^2\right)=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/4}\right)=$$

$$=\frac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{ (куб. од.)}$$

| | | |
|---|---|---|
| 2 | *Маса тіла* | $m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dxdydz$ , де $\mu(x,y,z)$ - щільність тіла |

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $(V)$: $x+y+z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, якщо його щільність

$$\mu=\frac{1}{(x+y+z+1)^3}$$

*Розв'язання.* Для обчислення маси тіла, яке займає область $(V)$, застосуємо формулу $m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dxdydz$. Побудуємо тіло у просторі (рис. 58):

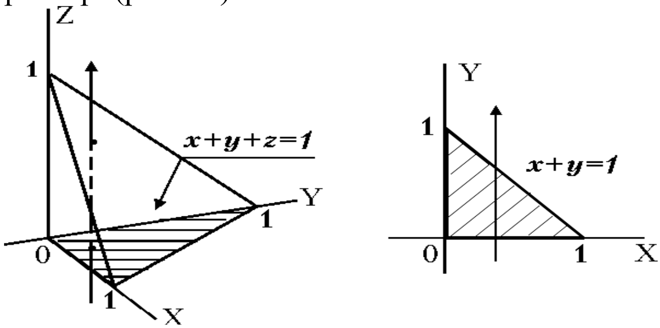



Рисунок 58

Це трьохгранна піраміда, яка розташована в першому октанті, її проекцією на площину $xOy$ є трикутник. Отже, межі інтегрування будуть такими:

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y.$$

Маса тіла $m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V)}\dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}=$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_{1-y}^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\left.\frac{-1/2}{(x+y+z+1)^2}\right|_0^{1-x-y}\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1/2}{(x+y+1)^2}\right)dy=\int_0^1\left.\left(-\frac{1}{8}y-\frac{1/2}{x+y+1}\right)\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{8}(x-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(x+1)}\right)dx=\left.\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{3x}{8}+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2\approx -0,313+\frac{1}{2}\cdot 0,692\approx$$

$$\approx 0,033 \text{ (од. маси)}$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $(V)$: $x^2+y^2=2-z$, $x^2+y^2=z^2$, $z>0$, якщо його щільність $\mu=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

*Розв'язання.* Для обчислення маси тіла, яке займає область $(V)$, застосуємо формулу $m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dxdydz$. Побудуємо тіло у просторі, знизу воно обмежене конусом, а зверху – параболоїдом (рис. 59). Перетин цих поверхонь дає коло радіуса 1.

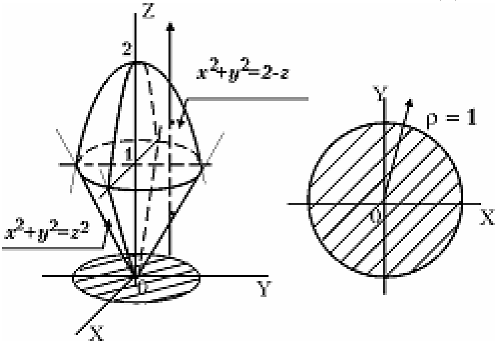



Рисунок 59

$$\begin{cases} x^2+y^2=2-z; \\ x^2+y^2=z^2; \end{cases}$$

$$z^2+z-2=0;\ z=1;$$

$$x^2+y^2=1.$$

Перейдемо до циліндричних координат: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \\ z=z. \end{cases}$

Тоді рівняння меж інтегрування будуть такими:

конус $x^2+y^2=z^2$, $z=\rho$ – поверхня входу,

параболоїд $x^2+y^2=2-z$, $z=2-\rho^2$ – поверхня виходу.

Вираз для щільності $\mu=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; $\mu=\rho^3$.

Межі інтегрування змінних $\rho$ і $\varphi$: $0\le\rho\le1;\quad 0\le\varphi\le2\pi$.

Елемент об'єму $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$.

Маса тіла $m=\iiint\limits_{(V)}\mu(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz=\iiint\limits_{(V)}\rho^3\cdot\rho d\rho d\varphi dz=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4 d\rho\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4 d\rho\left(z\Big|_{\rho}^{2-\rho^2}\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1\left(2\rho^4-\rho^6-\rho^5\right)d\rho=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho^4(2-\rho^2-\rho)d\rho=$$

$$=\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\rho^5-\frac{\rho^7}{7}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{7}-\frac{2}{6}\right)=\frac{19}{105}\pi \text{ (од. маси)}$$

**ПРИКЛАД 3.** Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $(V)$: $9\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $-x\le y\le x$, $z\ge 0$, $x\ge 0$, якщо його щільність $\mu=xz$.

*Розв'язання.* Побудуємо тіло у просторі і його проекцію на $xOy$ (рис. 60):

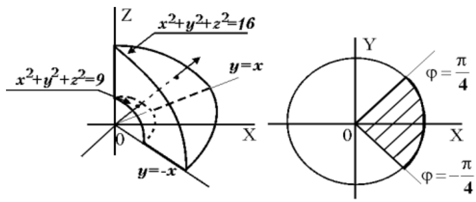



Рисунок 60

Для обчислення маси тіла, яке займає область $(V)$, застосуємо формулу $m=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dxdydz$. Перейдемо до сферичних координат: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z=\rho\cos\theta. \end{cases}$

Тоді рівняння поверхонь матимуть вигляд: $x^2+y^2+z^2=9$, $\rho=3$, $x^2+y^2+z^2=16$, $\rho=4$; так як все тіло розташоване у верхній півплощині, то $0\le\theta\le\pi/2$. Рівняння бічних стінок: $y=x$, $\varphi=\pi/4$; $y=-x$, $\varphi=-\pi/4$. Значить, кут $\varphi$ змінюється в межах $-\pi/4\le\varphi\le\pi/4$.

Елемент об'єму $dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$. Функція щільності

<table>
<tr><td colspan="3">

$$\mu = xz = \rho\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\cos\varphi = \rho^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi .$$

Отже,

$$m = \iiint\limits_{(V)} \mu(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} \mu(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi d\varphi \int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta \int\limits_{3}^{4}\rho^4 d\rho =$$

$$= \left(\sin\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}\right)\cdot\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_3^4\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4^5}{5} - \frac{3^5}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot 781}{15}\ \text{(од. маси)}$$

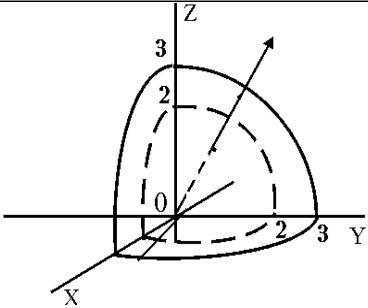
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Статичні моменти тіла відносно координатних площин:<br>відносно $xOy$<br><br>відносно $yOz$<br><br>відносно $xOz$</td><td>$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\cdot\mu(x,y,z)dxdydz$<br><br>$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\cdot\mu(x,y,z)dxdydz$<br><br>$M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y\cdot\mu(x,y,z)dxdydz$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Момент інерції тіла відносно координатних площин:<br>відносно $xOy$<br><br>відносно $yOz$<br><br>відносно $xOz$</td><td>$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z^2\cdot\mu(x,y,z)dxdydz$<br><br>$I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2\cdot\mu(x,y,z)dxdydz$<br><br>$I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y^2\cdot\mu(x,y,z)dxdydz$</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| 5 | *Момент інерції тіла відносно осей координат:*<br>відносно осі $Ox$<br><br>відносно осі $Oy$<br><br>відносно осі $Oz$ | $I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \mu dxdydz$<br>$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) \cdot \mu dxdydz$<br>$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \mu dxdydz$ |
| 6 | *Момент інерції тіла відносно початку координат:* | $I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \times$<br>$\times \mu(x, y, z) dxdydz$ |
| 7 | *Координати центра тяжіння (мас) тіла* $C(x_c, y_c, z_c)$: | $x_c = \dfrac{M_{yz}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{(V)} x \cdot \mu dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \mu dxdydz}$<br>$y_c = \dfrac{M_{xz}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{(V)} y \cdot \mu dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \mu dxdydz}$<br>$z_c = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{(V)} z \cdot \mu dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \mu dxdydz}$ |

*Зауваження.* В усіх попередніх формулах $\mu(x, y, z)$ – змінна щільність. У випадку, коли тіло однорідне, то, застосовуючи ці формули, зручно брати $\mu = 1$

**ПРИКЛАД.** Обчислити координати центра мас тіла, обмеженого поверхнями $(V)$: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,$ $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$, якщо його щільність $\mu = 1$.

*Розв'язання.* Побудуємо тіло і його проекцію на площину $xOy$ (рис. 61):



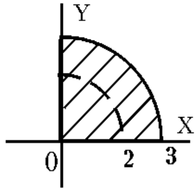



Рисунок 61

Перейдемо до сферичних координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$

Тоді рівняння поверхонь матимуть вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\rho = 2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $\rho = 3$; так як все тіло розташоване у верхній півплощині, то $0 \le \theta \le \pi/2$; так як $x \ge 0$, $y \ge 0$, то $0 \le \varphi \le \pi/2$. Елемент об'єму: $dxdydz = \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$, щільність тіла дорівнює одиниці.

Для обчислення координат центру мас застосуємо формули з пункту 7. Знайдемо статичні моменти відносно площин:

1) відносно площини $xOy$:

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} zdxdydz = \iiint\limits_{(V)} \rho\cos\theta\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_2^3 \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\theta \left[ \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_2^3 \right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3^4 - 2^4\right) \int\limits_0^{\pi/2} \left[ \left. \frac{-1}{2}\cos 2\theta \right|_0^{\pi/2} \right] d\varphi = -\frac{65}{16}\left(\cos\pi - \cos 0\right) \cdot \varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{65\pi}{16};$$

2) відносно площини $yOz$:

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} xdxdydz = \iiint\limits_{(V)} \rho\cos\varphi\sin\theta\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_2^3\rho^3 d\rho=$$

$$=\left(\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\left(\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_2^3\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3^4-2^4\right)\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{65}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{65\pi}{16};$$

3) відносно площини $xOz$:

$$M_{xz}=\iiint\limits_{(V)} ydxdydz=\iiint\limits_{(V)}\rho\sin\varphi\sin\theta\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_2^3\rho^3 d\rho=$$

$$=\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\left(\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_2^3\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3^4-2^4\right)\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{65}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{65\pi}{16}.$$

Обчислимо масу тіла: $m=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\iiint\limits_{(V)}\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_2^3\rho^2 d\rho=\left(\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_2^3\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{27-8}{3}=\frac{19\pi}{6}\ \text{(од. маси)}.$$

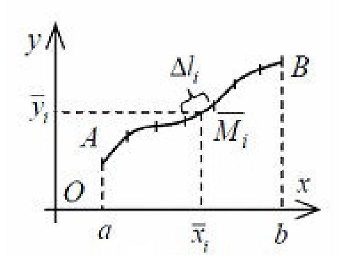
Отже, статичні моменти рівні за значенням між собою, тому координати центру мас дорівнюють:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{65\pi/16}{19\pi/6}=\frac{195}{152}=1\frac{43}{152},\ y_c=\frac{M_{xz}}{m}=1\frac{43}{152},$$

$$z_c=\frac{M_{xy}}{m}=1\frac{43}{152}$$

# 3 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

## 3.1 Криволінійний інтеграл за довжиною (І роду)

<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td colspan="3">Нехай у деякій області $D$ координатної площини $Oxy$ задано неперервне плоске скалярне поле $\mu = f\left(x, y\right)$ (Додаток Л). Припустимо, що в цій області $D$ лежить кусково-гладка матеріальна крива $L$. Нехай неперервна функція $\mu = f\left(x, y\right)$ визначає лінійну щільність розподілу маси вздовж кривої $L$.<br>Розіб'ємо дугу $L_{AB}$ (рис. 62) довільним способом на $n$ елементарних частин $\Delta l_i$, $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Розглянемо одну з елементарних дуг $\Delta l_i$. Нехай довжина $\Delta l_i$ цієї дуги настільки мала, що її щільність можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)$ в довільно вибраній точці $\overline{M_i}\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right) \in \Delta l_i$.<br>Тоді маса елементарної дуги $\Delta l_i$:<br>А маса всієї дуги $L_{AB}$:<br><br>Одержана сума називається інтегральною для функції $f\left(x, y\right)$ по довжині дуги $L_{AB}$</td><td><br><br>Рисунок 62<br><br>$\Delta m_i \approx f\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta l_i$<br>$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx$<br>$\approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta l_i$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2</td>
<td>Криволінійним інтегралом за довжиною (криволінійним інтегралом першого роду) називається скінченна границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta l_i$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини</td>
<td>$\int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y\right) dl =$ $= \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta l_i$ ,<br>де $dl$ – диференціал (елемент) довжини дуги</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>Фізичний зміст криволінійного інтеграла за довжиною</td>
<td>$m = \int\limits_{L_{AB}} \mu dl = \int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y\right) dl$</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною: якщо $f\left(x, y\right) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл чисельно дорівнює довжині $l$ дуги $L_{AB}$</td>
<td>$l = \int\limits_{L_{AB}} dl$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Зауваження 1. Якщо функція $f\left(x, y\right)$ неперервна в деякій області $D$, що містить в собі кусково-гладку криву $L$, то існує криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y\right) dl$ (достатні умови існування криволінійного інтегралу за довжиною).<br>Зауваження 2. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напряму руху по дузі: $\int\limits_{L_{BA}} f\left(x, y\right) dl = \int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y\right) dl$ .<br>Інші властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла.<br>Зауваження 3. Поняття криволінійного інтегралу за довжиною поширюється на випадок дуги $L_{AB}$ просторової лінії $L$, розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f\left(x, y, z\right)$:<br>$$\int\limits_{L_{AB}} f\left(x, y, z\right) dl = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\Delta l_i$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірного інтегралу методом заміни змінної</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Випадок 1. Нехай плоска дуга $L_{AB}$ задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ , тоді<br>$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt .$$Випадок 2. Нехай плоска дуга $L_{AB}$ задана в прямокутних координатах у явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$ , тоді<br>$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + (y')^2}\,dx .$$Випадок 3. Нехай дуга $L_{AB}$ задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ , тоді<br>$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\sqrt{(\rho)^2 + (\rho')^2}\,d\varphi .$$Випадок 4. Якщо просторова дуга $L_{AB}$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ , тоді<br>$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 1. Обчислити $\int\limits_{L} y^2\,dl$ , якщо<br>$$L: \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$</td></tr>
</table>

*Розв'язання.* Маємо випадок 1. Обчислимо

$$x' = \left(t - \sin t\right)' = t' - \left(\sin t\right)' = 1 - \cos t\ ,$$

$$y' = \left(1 - \cos t\right)' = 1' - \left(\cos t\right)' = 0 - \left(-\sin t\right) = \sin t\ ,$$

$$dl = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}dt = \sqrt{\left(1 - \cos t\right)^2 + \left(\sin t\right)^2}dt =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}dt = \sqrt{1 - 2\cos t + 1}dt =$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos t}dt = \sqrt{2\cdot\left(1 - \cos t\right)}dt = \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2\sin\frac{t}{2}dt\ .$$

Підставимо в інтеграл і обчислимо його:

$$\int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi}\left(1 - \cos t\right)^2\cdot 2\sin\frac{t}{2}dt = \int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\cdot 2\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 4\sin^4\frac{t}{2}\cdot 2\sin\frac{t}{2}dt = 8\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{t}{2}dt =$$

Обчислимо інтеграл за допомогою заміни змінної:

$$= \left|\begin{matrix} u = \cos\frac{t}{2} & du = -\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}dt & -2du = \sin\frac{t}{2}dt \\ u_1 = \cos\frac{0}{2} = 1 & u_2 = \cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1 & \end{matrix}\right| =$$

$$= 8\cdot\int\limits_1^{-1}\left(1 - u^2\right)^2\cdot\left(-2du\right) = -16\cdot\int\limits_1^{-1}\left(1 - u^2\right)^2 du =$$

$$= -16\cdot\int\limits_1^{-1}\left(1 - 2u^2 + u^4\right)du = -16\cdot\left(u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_1^{-1} =$$

$$=-16\cdot\left(-1-2\cdot\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^5}{5}-\left(1-2\cdot\frac{1^3}{3}+\frac{1^5}{5}\right)\right)=$$

$$=-16\cdot\left(-1-2\cdot\frac{-1}{3}+\frac{-1}{5}-\left(1-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right)=$$

$$=-16\cdot\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\right)=$$

$$=-16\cdot\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=-16\cdot\left(-2+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)=$$

$$=-16\cdot\frac{-30+20-6}{15}=-16\cdot\frac{-16}{15}=\frac{256}{15}$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити $\int\limits_L \frac{y^3}{x}dl$, якщо $L:\ y=\sqrt{x}$, $1\le x\le 3$.

*Розв'язання.* Маємо випадок 2. Обчислимо

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx=\frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x}}dx=\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Підставимо в інтеграл і обчислимо його:

$$\int\limits_L \frac{y^3}{x}dl=\int\limits_1^3\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_1^3\frac{x\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_1^3\sqrt{4x+1}\,dx=$$

Обчислимо інтеграл за допомогою заміни змінної:

$$=\left|\begin{matrix} t=4x+1; & dt=4dx; & dt/4=dx \\ t_1=4\cdot1+1=5; & t_2=4\cdot3+1=13 & \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_5^{13}\sqrt{t}\,\frac{dt}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_5^{13}t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{8}\cdot\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_5^{13}=\frac{1}{8}\cdot\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_5^{13}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left.\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right|_5^{13}=\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right|_5^{13}=\left.\frac{\sqrt{t^3}}{12}\right|_5^{13}=$$

$$=\frac{\sqrt{13^3}}{12}-\frac{\sqrt{5^3}}{12}=\frac{\sqrt{13^3}-\sqrt{5^3}}{12}$$

**ПРИКЛАД 3.** Обчислити $\int_L \sqrt[3]{x}\,y\,dl$, якщо $L$ – відрізок прямої від точки $A(0,1)$ до точки $B(8,3)$.

*Розв'язання.* Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(0,1)$ і $B(8,3)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x-0}{8-0}=\frac{y-1}{3-1},\quad \frac{x}{8}=\frac{y-1}{2},\quad \frac{x}{4}=\frac{y-1}{1},$$

$$x=4(y-1),\quad x=4y-4,\quad 4y=x+4,$$

$$y=\frac{1}{4}x+1.$$

Маємо випадок 2. Обчислимо

$$y'=\left(\frac{1}{4}x+1\right)'=\frac{1}{4}\cdot x'+0=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4},$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{16}}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{17}{16}}\,dx=\frac{\sqrt{17}}{4}\,dx$$

Підставимо в інтеграл і обчислимо його:

$$\int_L \sqrt[3]{x}\,y dl = \int_0^8 \sqrt[3]{x}\cdot\left(\frac{1}{4}x+1\right)\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}dx = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{4}x+1\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\int_0^8\left(\frac{1}{4}x\cdot x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\int_0^8 x^{\frac{4}{3}}dx+\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}\right|_0^8+\left.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right|_0^8\right) = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right|_0^8+\left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^8\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7}\right|_0^8+\left.\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\right|_0^8\right) = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3\sqrt[3]{8^7}}{7}+\frac{3\sqrt[3]{8^4}}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot 2^7}{7}+\frac{3\cdot 2^4}{4}\right) = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{3\cdot 2^5}{7}+3\cdot 4\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\left(\frac{96}{7}+12\right) = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{96+84}{7} = \frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{180}{7} =$$

$$= \sqrt{17}\cdot\frac{45}{7} = \frac{45\sqrt{17}}{7}$$

**ПРИКЛАД 4.** Обчислити $\displaystyle\int_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо

$$L:\ \rho = 2+\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/2.$$

*Розв'язання.* Маємо випадок 3. Обчислимо

$$\rho' = (2+\cos\varphi)' = -\sin\varphi,$$

$$dl = \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi = \sqrt{(2+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi = \sqrt{4+4\cos\varphi+1}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi$$

Підставимо в інтеграл і обчислимо його:

$$\int_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\rho\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi}{\rho} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi =$$

Обчислимо інтеграл за допомогою заміни змінної:

$$= \left| \begin{array}{l} t = 5+4\cos\varphi; \quad dt = -4\sin\varphi d\varphi; \quad -dt/4 = \sin\varphi d\varphi \\ t_1 = 5+4\cos 0 = 5+4 = 9; \;\; t_2 = 5+4\cos\dfrac{\pi}{2} = 5+4\cdot 0 = 5 \end{array} \right| =$$

$$= \int_9^5 \sqrt{t}\cdot\left(-dt/4\right) = -\frac{1}{4}\cdot\int_9^5 t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_9^5 =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_9^5 = -\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right|_9^5 = -\frac{1}{6}\cdot\left.\sqrt{t^3}\right|_9^5 = -\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{9^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-3^3\right) = -\frac{1}{6}\cdot\left(5\sqrt{5}-27\right) = \frac{27-5\sqrt{5}}{6}$$

**ПРИКЛАД 5.** Обчислити $\int\limits_L \frac{\left(2x+y\right)dl}{z^2}$, якщо $L$ – відрізок прямої між точками $A\left(3,-5,6\right)$, $B\left(5,-8,12\right)$.

*Розв'язання.* Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A\left(3,-5,6\right)$ і $B\left(5,-8,12\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-(-5)}{-8-(-5)}=\frac{z-6}{12-6},$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-6}{6}=t,$$

$$\frac{x-3}{2}=t, \quad \frac{y+5}{-3}=t, \quad \frac{z-6}{6}=t,$$

$$x=2t+3, \quad y=-3t-5, \quad z=6t+6.$$

Знайдемо, як змінюється параметр $t$, якщо $3 \le x \le 5$:

$$x=3: \ t=\frac{3-3}{2}=0,$$

$$x=5: \ t=\frac{5-3}{2}=1.$$

Маємо випадок 4. Обчислимо

$$x'=(2t+3)'=2, \quad y'=(-3t-5)'=-3, \quad z'=(6t+6)'=6,$$

$$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{4+9+36}\,dt=\sqrt{49}\,dt=7dt.$$

Підставимо в інтеграл і обчислимо його:

$$\int_L \frac{(2x+y)dl}{z^2}=\int_0^1 \frac{(2\cdot(2t+3)-3t-5)\cdot 7dt}{(6t+6)^2}=$$

$$=7\cdot\int_0^1 \frac{(4t+6-3t-5)dt}{36(t+1)^2}=\frac{7}{36}\cdot\int_0^1 \frac{(t+1)dt}{(t+1)^2}=\frac{7}{36}\cdot\int_0^1 \frac{dt}{t+1}=$$

$$=\frac{7}{36}\cdot\ln|t+1|\Big|_0^1=\frac{7}{36}\cdot(\ln|1+1|-\ln|0+1|)=\frac{7}{36}\cdot(\ln 2-\ln 1)=$$

$$=\frac{7}{36}\cdot(\ln 2-0)=\frac{7}{36}\ln 2$$

## 3.2 Застосування криволінійного інтеграла за довжиною

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Довжина дуги* $L$ | $L=\int\limits_L dl$ |
| 2 | *Маса* плоскої матеріальної дуги $L$ з лінійною щільністю $\mu=\mu(x,y)$ | $m=\int\limits_L \mu(x,y)\,dl$ |
| 3 | *Статичні моменти* дуги $L$ плоскої матеріальної кривої відносно осей $Ox$ і $Oy$ відповідно | $M_x=\int\limits_L y\,\mu(x,y)\,dl$, <br> $M_y=\int\limits_L x\,\mu(x,y)\,dl$ |
| 4 | *Моменти інерції* дуги $L$ плоскої матеріальної кривої відносно осей $Ox$ і $Oy$ відповідно та відносно початку координат | $I_x=\int\limits_L y^2\,\mu(x,y)\,dl$, <br> $I_y=\int\limits_L x^2\,\mu(x,y)\,dl$, <br> $I_0=\int\limits_L (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,dl$ |
| 5 | *Координати центра маси* дуги $L$ плоскої кривої | $x_C=\dfrac{M_y}{m}$, $y_C=\dfrac{M_x}{m}$ |

**ПРИКЛАД 1.** Знайти довжину дуги гвинтової лінії

$$L:\begin{cases} x=4\cos t; \\ y=4\sin t; \ (0\le t\le 2\pi). \\ z=3t, \end{cases}$$

*Розв'язання.* $\begin{cases} x'=-4\sin t; \\ y'=4\cos t; \quad dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt= \\ z'=3, \end{cases}$

$$=\sqrt{(-4\sin t)^2+(4\cos t)^2+3^2}dt=\sqrt{16\sin^2 t+16\cos^2 t+9}dt=$$

$$=\sqrt{16\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+9}dt=\sqrt{16+9}dt=\sqrt{25}dt=5dt,$$

$$L=\int_L dl=\int_0^{2\pi}5dt=5\cdot\int_0^{2\pi}dt=5\cdot t\Big|_0^{2\pi}=5\cdot(2\pi-0)=10\pi$$

**ПРИКЛАД 2.** Знайти центр маси півкола $x^2+y^2=R^2$, що лежить у верхній півплощині, а також його момент інерції відносно осі $Ox$. Лінійну щільність вважати рівною одиниці.

*Розв'язання.* $x^2+y^2=R^2$, $y^2=R^2-x^2$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$,

$$y'=\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}dx=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}dx=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx.$$

Обчислимо масу дуги:

$$m=\int_L \mu(x,y)dl=\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\cdot\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R}=R\cdot\left(\arcsin\frac{R}{R}-\arcsin\frac{-R}{R}\right)=R\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=R\pi.$$

Обчислимо статичні моменти:

$$M_x=\int_L y\,\mu(x,y)dl=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$$=R\cdot\int_{-R}^{R}dx=R\cdot x\Big|_{-R}^{R}=R\cdot(R+R)=2R^2,$$

$$M_y=\int_L x\,\mu(x,y)\,dl=\int_{-R}^{R} x\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\cdot\int_{-R}^{R}\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=R^2-x^2;\;\; dt=-2xdx;\;\; \dfrac{dt}{-2}=xdx \\ t_1=R^2-(-R)^2=0;\;\; t_2=R^2-R^2=0 \end{array}\right|=R\cdot\int_0^0\frac{\frac{dt}{-2}}{\sqrt{t}}=0.$$

Тоді координати центра маси:

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{0}{R\pi}=0,$$

$$y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{2R^2}{R\pi}=\frac{2R}{\pi}.$$

Обчислимо момент інерції відносно осі $Ox$:

$$I_x=\int_L y^2\,\mu(x,y)\,dl=\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$$=\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\cdot\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$$

$$=R\cdot\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=R\cdot\left(\frac{1}{R}\cdot x\cdot\sqrt{R^2-x^2}+\frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=$$

$$=R\cdot\left(\frac{1}{R}\cdot R\cdot\sqrt{R^2-R^2}+\frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{R}{R}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{R}\cdot(-R)\cdot\sqrt{R^2-(-R)^2}+\frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{(-R)}{R}\right)\right)=$$

$$=R\cdot\left(\frac{1}{2}R^2\arcsin 1-\frac{1}{2}R^2\arcsin(-1)\right)=R\cdot\left(\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}R^2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=R\cdot\left(\frac{\pi R^2}{4}+\frac{\pi R^2}{4}\right)=R\cdot\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi R^3}{2}$$

## 3.3 Криволінійний інтеграл за координатами (II роду)

<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td colspan="3">Нехай $L$ кусково-гладка просторова крива, на якій задано напрям, а $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції на ній. Розіб'ємо дугу $L_{AB}$ довільним способом на $n$ елементарних дуг $\Delta l_i$, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0,M_1,M_2,...,M_n=B$ з абсцисами $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Розглянемо елементарну дугу $\Delta l_i$, якій відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{l}_i=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$. Нехай довжина $\Delta l_i$ цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ можна вважати можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ в довільно обраній точці $\overline{M_i}\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\in\Delta l_i$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Елементарна робота $\Delta\tilde{A}_i$ на ділянці $\Delta l_i$ визначається скалярним добутком<br>Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках $\Delta l_i$, $i=\overline{1,n}$, і скласти суму, то одержана сума називається інтегральною для векторфункції $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ за спрямованою дугою $L_{AB}$<br>Очевидно, що</td><td>$\Delta\tilde{A}_i\approx\vec{F}\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot\Delta\vec{l}_i=$<br>$=P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot\Delta x_i+Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot\Delta y_i$<br><br>$\tilde{A}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\tilde{A}_i\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{F}\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot\Delta\vec{l}_i=$<br>$=\sum_{i=1}^{n}\Big(P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot\Delta x_i+$<br>$+Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot\Delta y_i\Big)$<br>$\tilde{A}=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\tilde{A}_i$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2</td>
<td>Криволінійним інтегралом за координатами (криволінійним інтегралом ІІ-го роду) називається скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини</td>
<td>$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$ $$= \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Big( P(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta x_i +$$ $$+ Q(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta y_i \Big)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>Фізичний зміст криволінійного інтеграла за координатами</td>
<td>$$A = \int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)d\vec{l}\ ,$$ де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – вектор диференціала (елемента) довжини плоскої дуги</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Зауваження 1. Якщо лінія $L$ замкнена, то інтеграл за цією лінією записується так $$\oint\limits_{L} \vec{F}(x,y)d\vec{l} = \oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\ ,$$ причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру $L$ явно не зазначено, то приймається додатний напрям.<br>Зауваження 2. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд $$\oint\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{l} = \oint\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\ ,$$ де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – вектор диференціала (елемента) довжини просторової дуги</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Властивості криволінійного інтеграла ІІ роду:<br>1) при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак;</td>
<td>$$\int\limits_{L_{BA}} \vec{F}d\vec{l} = -\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}d\vec{l}$$</td>
</tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | 2) векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, повний криволінійний інтеграл за координатами можна розглядати як суму трьох інтегралів; | $\int\limits_L \vec{F}d\vec{l} = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$ $= \int\limits_L P\,dx + \int\limits_L Q\,dy + \int\limits_L R\,dz$, де кожен з трьох інтегралів праворуч також називається *криволінійним інтегралом за координатою* $x$, $y$ *чи* $z$ відповідно |
| | 3) *закон збереження обертального руху*: при розбитті замкненого контура на замкнені підконтури значення сумарного криволінійного інтегралу не змінюється; | |
| | 4) *зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду*: оскільки $\left\|d\vec{l}\right\| = dl$, то $dx = dl\cos\alpha$, $dy = dl\cos\beta$, $dz = dl\cos\gamma$. Тоді криволінійний інтеграл за координатами зводиться до криволінійного інтеграла за довжиною | $\int\limits_L \vec{F}d\vec{l} = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$ $= \int\limits_L \big(Pdl\cos\alpha + Qdl\cos\beta +$ $+ Rdl\cos\gamma\big) =$ $= \int\limits_L \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)dl$ де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – напрямні кути вектора $d\vec{l}$ |
| | *Зауваження 3.* Інші властивості аналогічні властивостям звичайного визначеного інтегралу | |
| Обчислення криволінійного інтегралу за координатами здійснюється шляхом зведення його до одновимірного інтегралу методом заміни змінної | | |

<table>
<tr><td>5</td><td>

*Випадок 1.* Якщо плоска крива задана рівнянням $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, причому початку кривої відповідає значення $x=a$, а кінцю – $x=b$, то

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$$

$$=\int_a^b\Big(P\big[x,y(x)\big]+Q\big[x,y(x)\big]\cdot y'_x\Big)dx.$$

*Випадок 2.* Якщо крива $L$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases}x=x(t);\\ y=y(t)\end{cases}$ і початку кривої відповідає значення параметру $t=t_1$, а кінцю – $t=t_2$, то

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big(P\big[x(t),y(t)\big]\cdot x'_t+Q\big[x(t),y(t)\big]\cdot y'_t\Big)dt.$$

*Випадок 3.* Якщо просторова дуга $L$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases}x=x(t);\\ y=y(t);\\ z=z(t)\end{cases}$ і початку кривої відповідає значення параметру $t=t_1$, а кінцю – $t=t_2$, то

$$\int_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big(P\big[x(t),y(t),z(t)\big]\cdot x'_t+Q\big[x(t),y(t),z(t)\big]\cdot y'_t+$$

$$+R\big[x(t),y(t),z(t)\big]\cdot z'_t\Big)dt$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

**ПРИКЛАД 1.** Обчислити криволінійний інтеграл за координатами $\int_L -y^2x\,dx+x^2y\,dy$, де $L:\ \begin{cases}x=\sqrt{\cos t};\\ y=\sqrt{\sin t},\end{cases}\ 0\le t\le\pi$

</td></tr>
</table>

*Розв'язання.* Маємо випадок 2. Знайдемо:

$$dx = x'dt = \left(\sqrt{\cos t}\right)' dt = \frac{1}{2\sqrt{\cos t}} \cdot (\cos t)' dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos t}} \cdot (-\sin t) dt = -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}} dt,$$

$$dy = y'dt = \left(\sqrt{\sin t}\right)' dt = \frac{1}{2\sqrt{\sin t}} \cdot (\sin t)' dt = \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} dt.$$

Тоді

$$\int_L -y^2 x dx + x^2 y dy = \int_0^{\pi} \left( -\left(\sqrt{\sin t}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos t} \cdot \left( -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\cos t}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\sin t}\right) \cdot \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} \right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left( -\sin t \sqrt{\cos t} \cdot \left( -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}} \right) + \cos t \sqrt{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} \right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left( \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{\cos^2 t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \left( \sin^2 t + \cos^2 t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2} \cdot t \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити криволінійний інтеграл за координатами $\int\limits_L 2xydx + x^2 dy$, де $L$ – відрізок прямої $AB$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,3)$.

*Розв'язання.* Складемо рівняння прямої $AB$ за допомогою рівняння прямої, що проходить через дві точки [12]:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{3 - 0}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{3}, \quad y = 3x$$

Маємо випадок 1. Знайдемо:

$$dy = (3x)'\,dx = 3dx\,.$$

Тоді

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 \left(2x \cdot 3x + x^2 \cdot 3\right)dx = \int_0^1 \left(6x^2 + 3x^2\right)dx =$$

$$= 9 \cdot \int_0^1 x^2dx = 9 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 9 \cdot \frac{1^3}{3} = 3$$

**ПРИКЛАД 3.** Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, де $L$ – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

*Розв'язання.* Маємо випадок 1. Знайдемо:

$$dy = \left(2\sqrt{x}\right)'dx = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$$

Тоді $\int_L (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy = \int_0^1 \left(x \cdot 2\sqrt{x} - x\right)dx + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$$= \int_0^1 \left(2x \cdot x^{\frac{1}{2}} - x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int_0^1 \left(2x^{1+\frac{1}{2}} - x + \frac{1}{2}x^{2-\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^{\frac{3}{2}} - x + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x\right)dx =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^1 xdx = \frac{5}{2} \cdot \left.\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_0^1 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{5}{2} \cdot \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 =$$

$$= \left.x^{\frac{5}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1^{\frac{5}{2}} - \frac{1^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**ПРИКЛАД 4.** Обчислити $\int\limits_L y^2dx + x^2dy + z^2dz$, де $L$ – відрізок прямої у просторі від точки $A(1,0,2)$ до $B(3,1,4)$.

*Розв'язання.* Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $A$ і $B$ [12]:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t,$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = t; \\ \dfrac{y}{1} = t; \\ \dfrac{z-2}{2} = t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t+1; \\ y = t; \\ z = 2t+2. \end{cases}$$

Маємо випадок 3. Знайдемо:

$$dx = (2t+1)'\,dt = 2dt, \quad dy = t'dt = dt,$$

$$dz = (2t+2)'\,dt = 2dt.$$

Параметр змінюється в межах $t_A \le t \le t_B$, тобто $0 \le t \le 1$, тоді

$$\int\limits_L y^2dx + x^2dy + z^2dz = \int\limits_0^1 t^2 \cdot 2dt + (2t+1)^2 \cdot dt + (2t+2)^2 \cdot 2dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2t^2 + 4t^2 + 4t + 1 + 2\cdot\left(4t^2 + 8t + 4\right)\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(14t^2 + 20t + 9\right)dt = \left(14\cdot\frac{t^3}{3} + 20\cdot\frac{t^2}{2} + 9t\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 14\cdot\frac{1^3}{3} + 20\cdot\frac{1^2}{2} + 9\cdot 1 - 0 = \frac{14}{3} + 10 + 9 = \frac{71}{3}$$

## 3.4 Формула Гріна

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Якщо $L$ – кусково-гладкий замкнений контур, який обмежує область $D$, орієнтований так, що при обході $L$ область $D$ залишається ліворуч, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області $D$, то має місце *формула Гріна*: | $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$ $=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ |

**ПРИКЛАД 1.** За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L (8x-y)dx+(x+5y)dy$, де $L$: $x^2+y^2=9$ – коло, (обхід контуру – проти годинникової стрілки).

*Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(8x-y)'_y=-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=(x+5y)'_x=1.$$

Підставимо знайдені похідні в формулу Гріна:

$$\oint\limits_L (8x-y)dx+(x+5y)dy=\iint\limits_D\big(1-(-1)\big)dxdy=2\iint\limits_D dxdy=$$

Перейдемо до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi.$$

Тоді $D: 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 3$:

$$=2\cdot\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi=2\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho d\rho=2\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^3\right)d\varphi=$$

$$=2\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)d\varphi=2\cdot\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}d\varphi=2\cdot\frac{9}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=9\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi=9\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=9\cdot(2\pi-0)=18\pi$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити криволінійний інтеграл:
1) по замкненому контуру в додатньому напрямку (проти годинникової стрілки); 2) за допомогою формули Гріна.

$$\oint_L\left(x-y^2\right)dy+\left(x^3+3y\right)dx,\quad L: x=y,\ y=x^2.$$

*Розв'язання.* Побудуємо задані лінії: пряму $x=y$ і параболу $y=x^2$ (рис.63).

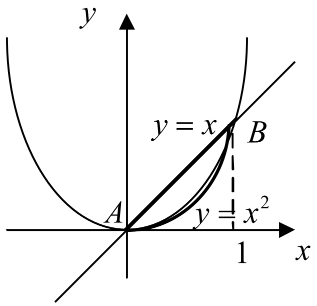



Рисунок 63

1) по замкненому контуру в додатньому напрямку (проти годинникової стрілки):

$$\oint_L\left(x-y^2\right)dy+\left(x^3+3y\right)dx=\int_{AB}\left(x-y^2\right)dy+\left(x^3+3y\right)dx+$$

$$+\int_{BA}\left(x-y^2\right)dy+\left(x^3+3y\right)dx,$$

1) $AB:\ y=x^2,\ dy=\left(x^2\right)'dx=2xdx,$

$$\int_0^1\left(x-\left(x^2\right)^2\right)\cdot 2xdx+\left(x^3+3x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1 \left(x-x^4\right)\cdot 2xdx+\left(x^3+3x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1 \left(2x^2-2x^5+x^3+3x^2\right)dx=\int_0^1 \left(5x^2-2x^5+x^3\right)dx=$$

$$=\left(5\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=5\cdot\frac{1^3}{3}-2\cdot\frac{1^6}{6}+\frac{1^4}{4}=$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{2}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{16+3}{12}=\frac{19}{12},$$

2) $BA$: $y=x$, $dy=dx$,

$$\int_1^0 \left(x-x^2\right)dx+\left(x^3+3x\right)dx=\int_1^0 \left(x-x^2+x^3+3x\right)dx=$$

$$=\int_1^0 \left(4x-x^2+x^3\right)dx=\left(4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^0=$$

$$=0-\left(4\cdot\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}+\frac{1^4}{4}\right)=-\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{24-4+3}{12}=-\frac{23}{12}.$$

Тоді $\oint\limits_L \left(x-y^2\right)dy+\left(x^3+3y\right)dx=\frac{19}{12}-\frac{23}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$.

2) за допомогою формули Гріна:

$$D: 0<x<1,\ x^2<y<x \text{ (рис. 64)}$$

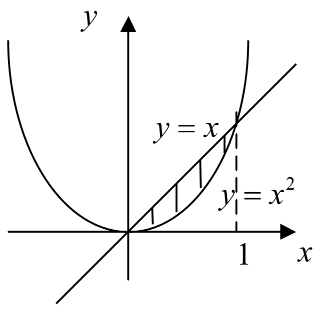



Рисунок 64

| |
|---|
| Знайдемо частинні похідні: $$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(x^3+3y\right)'_y=3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\left(x-y^2\right)'_x=1.$$ Тоді $$\oint_L \left(x-y^2\right)dy+\left(x^3+3y\right)dx=\iint_D (1-3)\,dxdy=$$ $$=-2\cdot\iint_D dxdy=-2\cdot\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=-2\cdot\int_0^1\left(y\Big\|_{x^2}^{x}\right)dx=$$ $$=-2\cdot\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=-2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg\|_0^1=-2\cdot\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)=$$ $$=-2\cdot\frac{3-2}{6}=-2\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$ |

## 3.5 Умови незалежності криволінійного інтеграла за координатами від шляху інтегрування

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | Криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ називається *незалежним від шляху інтегрування* в області $D$, якщо для будь-яких точок $A$ і $B$ із області $D$ значення цього інтеграла не змінюється незалежно від того, по якій лінії з початком в точці $A$ і кінцем в точці $B$ він обчислюється, аби тільки ця лінія належала області $D$ | |
| 2 | Кінцева область $D$ називається *однозв'язною*, якщо вона обмежена єдиним замкненим контуром<br>*Теорема.* Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ визначені і | |

| | |
|---|---|
| | неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкненій обмеженій однозв'язній області $D$, то для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був незалежним від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб для всіх точок цієї області виконувалась умова $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ |

*Зауваження 1.* Умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ є необхідною і достатньою для того, щоб вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був повним диференціалом деякої однозначної функції, визначеної в області $D$. Тому можна стверджувати, що для того, щоб криволінійний інтеграл не залежав від шляху інтегрування $L_{AB}$, а тільки від його кінців, необхідно і достатньо, щоб вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був повним диференціалом деякої функції.

*Зауваження 2.* Якщо виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, тобто, якщо вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції, то криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, взятий по будь-якому замкненому контуру $L_{AB}$, цілком розташованому в області $D$, дорівнює нулю.

*Зауваження 3.* Якщо криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, в якості шляху інтегрування обирають найпростіший шлях – відрізок прямої

**ПРИКЛАД.** Перевірити, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування і знайти його значення

$$\int_{(0,-3)}^{(1,3)} \left(6x^2y - x\right)dx + 2x^3dy\,.$$

*Розв'язання.* Перевіримо, що криволинійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування:

$$P = 6x^2y - x\,,\quad Q = 2x^3\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(6x^2y - x\right)'_y = 6x^2\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(2x^3\right)'_x = 6x^2\,,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Тобто заданий криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Найпростіший шлях інтегрування від точки $(0;-3)$ до точки $(1;3)$ – по прямій, що з'єднує ці точки. Складемо рівняння прямої, що проходить через ці точки [12]:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,,$$

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-(-3)}{3-(-3)}\,,\quad \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6}\,,\quad 6x = y + 3\,,$$

$$y = 6x - 3\,,\; dy = 6dx\,.$$

Тоді $\displaystyle\int_{(0,-3)}^{(1,3)} \left(6x^2y - x\right)dx + 2x^3dy = \int_0^1 \left(6x^2\cdot(6x-3) - x\right)dx + 2x^3\cdot 6dx =$

$$= \int_0^1 \left(36x^3 - 18x^2 - x + 12x^3\right)dx = \int_0^1 \left(48x^3 - 18x^2 - x\right)dx =$$

$$= \left(48\cdot\frac{x^4}{4} - 18\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 48\cdot\frac{1^4}{4} - 18\cdot\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} =$$

$$= 12 - 6 - \frac{1}{2} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

## 3.6 Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах

<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>Розглянемо функцію $u(x,y)$, задану в деякій області $D$, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал</td><td>$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$</td></tr>
<tr><td>Позначимо $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$. Тоді для повного диференціалу маємо:</td><td>$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача відшукання функції $u(x,y)$ за її повним диференціалом розв'язується з точністю до довільної сталої за однією із формул:<br>$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int Q(x_0,y)\,dy + C, \qquad (3.1)$$<br>$$u(x,y) = \int P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C, \qquad (3.2)$$<br>де $x_0$, $y_0$ – довільно обрані числа, які обирають таким чином, щоб максимально спростити функції $Q(x_0,y)$ і $P(x,y_0)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Диференціальне рівняння $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина задовольняє умові [14]</td><td>$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Загальний інтеграл такого рівняння можна знайти за формулами:
$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int Q(x_0,y)\,dy = C, \qquad (3.3)$$
$$\int P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C, \qquad (3.4)$$
де $x_0$, $y_0$ обираються так само як і для формул (3.1), (3.2)</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Перевірити, що вираз
$$du(x,y) = \left(3x^2y+1\right)dx + \left(x^3-1\right)dy$$
є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.<br>
Розв'язання: Маємо
$$P(x,y) = 3x^2y+1, \quad Q(x,y) = x^3-1.$$
Обчислимо
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(3x^2y+1\right)'_y = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(x^3-1\right)'_x = 3x^2.$$
Отже, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тобто даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Знайдемо цю функцію за формулою (3.1): $x_0 = 0$,
$$u(x,y) = \int_0^x P(x,y)\,dx + \int Q(0,y)\,dy + C =$$</td></tr>
</table>

$$=\int_0^x\left(3x^2y+1\right)dx+\int\left(0^3-1\right)dy+C=3y\cdot\int_0^x x^2dx+\int_0^x dx-\int dy+C=$$

$$=3y\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x+\left.x\right|_0^x-y+C=3y\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+x-0-y+C=$$

$$=3y\cdot\frac{x^3}{3}+x-y+C=x^3y+x-y+C.$$

Перевірка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3y+x-y+C\right)'_x=y\cdot\left(x^3\right)'_x+\left(x\right)'_x-0+0=$$

$$=y\cdot 3x^2+1=3x^2y+1=P\left(x,y\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3y+x-y+C\right)'_y=x^3\cdot\left(y\right)'_y+0-\left(y\right)'_y+0=$$

$$=x^3\cdot 1-1=x^3-1=Q\left(x,y\right).$$

Таким чином, $u\left(x,y\right)=x^3y+x-y+C$

**ПРИКЛАД 2.** Перевірити, що задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок

$$\frac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0.$$

*Розв'язання.*Маємо

$$P\left(x,y\right)=\frac{y}{x},\quad Q\left(x,y\right)=y^3+\ln x.$$

Обчислимо

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}\cdot\left(y\right)'_y=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y^3+\ln x\right)'_x=0+\left(\ln x\right)'_x=\frac{1}{x}.$$

Отже, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тобто задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Розв'яжемо його за допомогою формули (3.4):

$$y_0 = 0,$$

$$\int \frac{0}{x}dx + \int_0^y \left(y^3 + \ln x\right)dy = C,$$

$$\int_0^y y^3 dy + \ln x \cdot \int_0^y dy = C, \quad \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^y + \ln x \cdot y\big|_0^y = C,$$

$$\frac{y^4}{4} - \frac{0^4}{4} + \ln x \cdot \left(y - 0\right) = C, \quad \frac{y^4}{4} + y\ln x = C.$$

Розв'яжемо задане рівняння також за допомогою формули (3.3): $$x_0 = 1$$

($x_0 = 0$ брати не можна, адже $\ln 0$ не існує),

$$\int_1^x \frac{y}{x}dx + \int \left(y^3 + \ln 1\right)dy = C, \quad y \cdot \int_1^x \frac{dx}{x} + \int y^3 dy = C,$$

$$y \cdot \ln|x|\Big|_1^x + \frac{y^4}{4} = C, \quad y \cdot \left(\ln|x| - \ln|1|\right) + \frac{y^4}{4} = C, \quad y\ln x + \frac{y^4}{4} = C.$$

Перевірка: $$u = \frac{y^4}{4} + y\ln x - C,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{y^4}{4} + y\ln x - C\right)'_x = 0 + y \cdot \left(\ln x\right)'_x - 0 = y \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{y}{x} = P\left(x, y\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{y^4}{4} + y\ln x - C\right)'_y = \frac{1}{4} \cdot \left(y^4\right)'_y + \ln x \cdot \left(y\right)'_y - 0 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4y^3 + \ln x \cdot 1 = y^3 + \ln x = Q\left(x, y\right).$$

Таким чином, $\dfrac{y^4}{4} + y\ln x = C$ – розв'язок рівняння

## 3.7 Застосування криволінійного інтеграла за координатами

| Ч.ч. | Словесне формулювання | Аналітичний запис, графічне зображення |
|---|---|---|
| 1 | *Площа плоскої фігури*, обмеженої кривою $L$ | $S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$ |
| 2 | *Робота*, здійснена змінною силою $\vec{F}\left(P,Q,R\right)$ уздовж шляху $L$ | $A=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$ |

**ПРИКЛАД 1.** Знайти площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

*Розв'язання.* Перейдемо до параметричних рівнянь $\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=b\sin t. \end{cases}$

Додатному обходу контура відповідає зміна параметра $t$ від 0 до $2\pi$, тоді

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} xdy-ydx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t\left(-a\sin t\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\right)dt=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}dt=\frac{ab}{2}\cdot t\Big|_0^{2\pi}=\frac{ab}{2}\cdot\left(2\pi-0\right)=\pi ab$$

**ПРИКЛАД 2.** Обчислити роботу сили

$$\vec{F}=\left(x^2-y\right)\vec{i}+\left(y^2-x\right)\vec{j}$$

при переміщенні матеріальної точки одиничної маси з точки

$A(-1,0)$ в точку $B(0,1)$.

*Розв'язання.*

$$A=\int_{AB}\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy .$$

$$P=x^2-y\,,\quad Q=y^2-x\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(x^2-y\right)'_y=0-1=-1\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y^2-x\right)'_x=0-1=-1\,.$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, тобто криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

Найпростіший шлях інтегрування від точки $A(-1,0)$ до точки $B(0,1)$ – по прямій, що з'єднує ці точки. Складемо рівняння прямої, що проходить через ці точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\,,$$

$$\frac{x-(-1)}{0-(-1)}=\frac{y-0}{1-0},\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1},\quad y=x+1\,,$$

$$dy=(x+1)'\,dx=dx\,,$$

$$A=\int_{AB}\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(x^2-(x+1)\right)dx+\left((x+1)^2-x\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(x^2-x-1+x^2+2x+1-x\right)dx=\int_{-1}^{0}2x^2dx=2\cdot\int_{-1}^{0}x^2dx=$$

$$=2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0}=2\cdot\frac{0^3}{3}-2\cdot\frac{(-1)^3}{3}=-2\cdot\frac{-1}{3}=\frac{2}{3}$$

# СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Архіпова О. С. Посібник для розв’язання типових завдань з курсу «Вища математика» / О. С. Архіпова, В. П. Протопопова, Є. С. Пахомова. – Харків : ХНАМГ, 2008. − 210 с.

2. Барковський В. В. Вища математика для економістів : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковський. – 5-те вид. Київ : Центр учбової літератури, 2010. – 446 с.

3. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 7-е изд., стереотипное. М : Наука, 1971. – 735 с.

4. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М : Наука, 1973. – 872 с.

5. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / [Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин и др.] ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.

6. Вища математика для електротехніків : у 3-х модулях : навч. посібник / [С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін.] ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009. – Модуль 3 : Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – 2011. – 383 с.

7. Гуран І. Математика для економістів : підручник / І. Гуран, О. Гутік. – Львів, 2006. – 382 с.

8. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач : математический анализ / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

9. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2 – 415 с.

10. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: в 5-ти частях / И. А. Каплан. – Харьков : изд-во при

ХГУ, 1971. – Ч. 4 : Кратные и криволинейные интегралы. – 133 с.

11. Колосов А. І. Вища математика для економістів : у 2-х модулях [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – Модуль 2 : конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 –Економіка підприємства і 6.030509 –Облік і аудит). – 257 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/35973/.

12. Кузнецова Г. А. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/34810/.

13. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Укл. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/39383/.

14. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 2 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Укл. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 142 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486/.

15. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов. – Том 1. – 8-е изд., стереотипное / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1968. – 552 с.

16. Терехина Л. И. Высшая математика. Часть 4, учебное пособие / Л. И. Терехина, И. И. Фикс . – Томск, 2009. – 192 с.

# ДОДАТКИ

## Додаток А
## Область визначення функції двох змінних

Для даної функції $z=\ln(9-x^2-9y^2)$ областю визначення є множина всіх тих точок $(x,y)$, для яких виконується нерівність $9-x^2-9y^2>0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні $x$, $y$ немає. (Детальніше пояснення та розв'язання можна знайти у конспекті лекцій : http://eprints.kname.edu.ua/35973/ ).

## Додаток Б
## Дослідження функції двох змінних

В аналітичній геометрії під час вивчення поверхонь другого порядку, а також їх побудови, використовують *метод січних*, завдяки якому визначення виду поверхні за його рівнянням виконується через дослідження кривих, утворених під час перерізу цієї поверхні площинами, паралельними до координатних площин. Аналогічний метод застосовують для вивчення будь-яких функцій двох ( і більше) змінних. Для цього, досліджуючи функцію $z=f\left(x,y\right)$, якщо ми надамо аргументу $y$ постійне значення $y_0$, то змінюватиметься лише $x$, тобто функція $z$ перетвориться на функцію однієї змінної $x$: $z=f\left(x,y_0\right)$. Застосовуючи до цієї функції відомі методи дослідження функції однієї змінної, ми з'ясуємо характер змін величини $z$ в залежності від змін величини $x$. Геометрично це означає, що ми розглядаємо лінію перетину поверхні $z=f\left(x,y\right)$ з площиною $y=y_0$ паралельною до площини $0xz$. Далі можна надавати $y$ інше постійне значення $y_1$ і також досліджувати. Аналогічним чином з'ясовується поведінка $z$ в залежності від змін величини $y$ при різних, але постійних значеннях $x$.

Завдяки таким засобам дослідження функції двох змінних фактично зводиться до дослідження функції однієї змінної.

У прикладних науках лінії рівня дуже часто застосовують для вивчення функції двох змінних. У метеорології використовують ізобари та ізотерми (лінії однакового тиску та лінії однакових середніх температур), які є лінями рівня тиску і температури як функції координат точок місцевості. У топографії горизонталі – лінії рівня функції двох змінних координат точки в залежності від висоти точки місцевості над рівнем моря.

## Додаток В
## Окіл точки

У $n$-вимірному просторі *окіл точки* – будь-яка область, що містить цю точку.

*Окіл точки $A$* в метричному просторі – будь-яка область, що містить точку $A$. Загалом усі точки $M$, відстань від яких до точки $A$ менше деякого додатного числа $\delta$, утворює її (тобто точки $A$) сферичний окіл радіуса $\delta$ з центром у точці $A$.

## Додаток Г
## Теорема про повний диференціал функції двох змінних

**Теорема.** Повний диференціал функції двох змінних дорівнює сумі добутків частинних похідних функції на диференціали відповідних незалежних змінних.

## Додаток Д
## Гладкий та гострий екстремуми

Розрізняють *гладкий екстремум* (наприклад, на рисунку Д.1 показано гладкий максимум), в якому функція диференційована, і *гострий екстремум*, в якому хоча б одна частинна похідна першого порядку не існує (на рисунку Д.2 – гострий максимум).

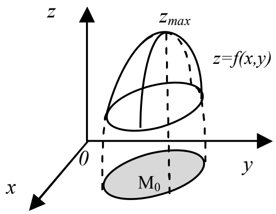



Рисунок Д.1

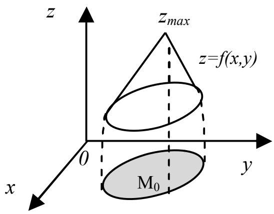



Рисунок Д.2

## Додаток Е
## Сідлова точка гіперболічного параболоїда

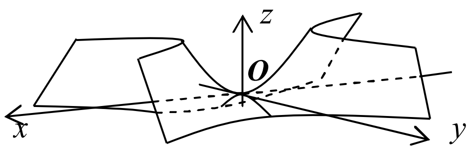



Рисунок Е.1

Наприклад, на рисунку Е.1 показано гіперболічний параболоїд [12], рівнянням якого є $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$. Для цієї функції початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки

$$\partial z/\partial x\big|_O = x\big|_O = 0\,;$$

$$\partial z/\partial y\big|_O = -\,y\big|_O = 0\,,$$

але екстремум у ній відсутній. Тож, точка $O(0,0)$ – *сідлова точка* функції $z = (x^2 - y^2)/2$.

Сідлові точки є аналогом точок перегину функції однієї змінної, слід відокремлювати їх від точок екстремуму.

## Додаток Ж
## Основні правила обчислення градієнта

Основні правила обчислення градієнта:

1) $\operatorname{grad}(u + v - w) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} \mathrm{v}\text{-}\operatorname{grad} w$ ;

2) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} \mathrm{v}$ ;

2а) $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u$ ; $C = const$ ;

3) $\operatorname{grad}(u/v) = (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} \mathrm{v}) / v^2$ .

## Додаток И

### Поняття скалярного поля та скалярної функції

Якщо кожній точці $M$ заданої області простору (найчастіше розмірності 2 або 3) поставлено у відповідність деяке (зазвичай – дійсне) число $u$, то говорять, що в цій області задано *скалярне поле.* Іншими словами, *скалярне поле* – це функція, яка відображає $R^n$ в $R$ (*скалярна функція* точки простору). Найбільш часто зустрічається в таких застосуваннях: функція трьох змінних $u = u(r) = u(x, y, z)$ – скалярне поле у тривимірному просторі (інколи називають просторовим полем); функція двох змінних $u = u(r) = u(x, y)$ – скалярне поле в двовимірному просторі (інколи називають плоским полем); у фізиці та багатьох прикладних науках, поле, взагалі говорять, залежить від часу: $u = u(x, y, z, t)$, тобто маємо справу з чотиривимірним простором.

## Додаток К

### Приклади перетворення рівнянь ліній при переході від декартових координат до полярних

Таблиця К.1 – Приклади перетворення рівнянь ліній при переході від декартових координат до полярних

| Ч.ч. | Назва поверхні | Рівняння лінії в прямокутних координатах | Рівняння лінії в полярних координатах |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Коло | $x^2 + y^2 = R^2$ | $\rho^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$ |
| 2 | Пряма | $y = kx$ | $\rho \sin\varphi = k \rho \cos\varphi \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow tg\varphi = k \Leftrightarrow$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| | | | $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = arctgk; \\ \varphi = arctgk + \pi \end{array}\right.$ |
| 3 | Пряма | $y = x$ | $\left[\begin{array}{l} \varphi = \pi/4; \\ \varphi = 5\pi/4 \end{array}\right.$ |
| 4 | Пряма | $y = b,\ b = const$ | $\rho \sin\varphi = b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \rho = b/\sin\varphi$ |
| 5 | Еліпс | $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ $a,\ b - const$ | $\dfrac{\rho^2 \cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\rho^2 \sin^2\varphi}{b^2} = 1,$ $\rho = \dfrac{\lvert ab \rvert}{\sqrt{b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi}}$ |
| 6 | Гіпербола | $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ $a,\ b - const$ | $\dfrac{\rho^2 \cos^2\varphi}{a^2} - \dfrac{\rho^2 \sin^2\varphi}{b^2} = 1,$ $\rho = \dfrac{\lvert ab \rvert}{\sqrt{b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi}}$ |
| 7 | Парабола | $y^2 = 2px$ | $\rho^2 \sin^2\varphi = 2p\rho\cos\varphi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \rho = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ |
| 8 | Лемніската Бернуллі | $(x^2 + y^2)^2 =$ $= a^2(x^2 - y^2)$, $a = const$ | $\rho^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \rho = \lvert a \rvert \sqrt{\lvert \cos 2\varphi \rvert}$ |
| 9 | Декартів лист | $x^2 + y^2 = 3axy$ | $\rho = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ |

## Додаток Л
## Приклади перетворення рівнянь поверхонь при переході від декартових координат до циліндричних

Таблиця Л.1 − Приклади перетворення рівнянь поверхонь при переході від декартових координат до циліндричних

| Ч.ч. | Назва поверхні | Рівняння поверхні в прямокутних координатах | Рівняння поверхні в циліндричних координатах |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Параболоїд | $z = x^2 + y^2$ | $z = \rho^2$ |
| 2 | Параболоїд | $y = x^2 + z^2$ | $y = \rho^2$ |
| 3 | Параболоїд | $x = y^2 + z^2$ | $x = \rho^2$ |
| 4 | Параболоїд | $-z = x^2 + y^2$ | $-z = \rho^2 \Leftrightarrow z = -\rho^2$ |
| 5 | Параболоїд | $-y = x^2 + z^2$ | $-y = \rho^2 \Leftrightarrow y = -\rho^2$ |
| 6 | Параболоїд | $-x = y^2 + z^2$ | $-x = \rho^2 \Leftrightarrow x = -\rho^2$ |
| 7 | Конус | $z^2 = x^2 + y^2$ | $z^2 = \rho^2 \Leftrightarrow z = \pm\rho$ |
| 8 | Конус | $y^2 = x^2 + z^2$ | $y^2 = \rho^2 \Leftrightarrow y = \pm\rho$ |
| 9 | Конус | $x^2 = y^2 + z^2$ | $x^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x = \pm\rho$ |
| 10 | Сфера | $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ | $\rho^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{R^2 - \rho^2}$ |
| 11 | Циліндр | $x^2 + y^2 = R^2$ | $\rho^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$ |
| 12 | Циліндр | $x^2 + z^2 = R^2$ | $\rho^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$ |
| 13 | Циліндр | $y^2 + z^2 = R^2$ | $\rho^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$ |
| 14 | Площина | $y = x$ | $\rho \sin\varphi = \rho \cos\varphi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow tg\varphi = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = \pi/4; \\ \varphi = 5\pi/4\end{array}\right.$ |

# Додаток М
## Приклади перетворення рівнянь поверхонь при переході від декартових координат до сферичних

Таблиця М.1 − Приклади перетворення рівнянь поверхонь при переході від декартових координат до сферичних

| Ч.ч. | Назва поверхні | Рівняння поверхні в прямокутних координатах | Рівняння поверхні в сферичних координатах |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Сфера | $x^2+y^2+z^2=R^2$ | $z^2=R^2 \Leftrightarrow \rho=R$ |
| 2 | Конус | $z^2=x^2+y^2$ | $\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow tg\theta=\pm 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \theta=\pi/4$ - верхня половина конуса, $\Leftrightarrow \theta=3\pi/4$ - нижня половина конуса |
| 3 | Площина | $y=kx$ | $\rho\sin\theta\cos\varphi=k\rho\sin\theta\cos\varphi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow tg\varphi=k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi=arctgk$ |

Довідкове видання

**КУЗНЕЦОВА** Ганна Анатоліївна,
**ЛАМТЮГОВА** Світлана Миколаївна,
**СИТНИКОВА** Юлія Валеріївна

**ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ**
Частина 3

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
усіх спеціальностей)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*
*За авторською редакцією*
Комп’ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2016, поз. 167 М

---

Підп. до друку 28.10.2016. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 6,3
Тираж 50 пр. Зам. №
Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.